Министерство образования и науки Российской Федерации

Южно-Уральский государственный университет

Кафедра «Прикладная математика и ракетодинамика»

519.2(07)

Н166

О.Ю. Наговицына, Е.А. Напалкова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Под редакцией В.И. Киселева

Челябинск

Издательский центр ЮУрГУ

2023

УДК 519.21(075.8)

Н166

Одобрено учебно-методической комиссией электротехнического факультета

Рецензент С.Г.Пудовкина

Наговицына О.Ю., Напалкова Е.А.

Н166 Теория вероятностей: учебное пособие/О.Ю.Наговицына, Е.А.Напалкова; под ред. В.И.Киселёва.- Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2023- 47с.

Предлагаемое учебное пособие содержит раздел рабочей программы «Теория вероятностей» для студентов технических факультетов, а также оно может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих данный раздел. В нём излагается теоретический материал по данной главе, который сопровождается рассмотрением большого количества типовых примеров. Наличие в учебном пособии списка экзаменационных вопросов поможет студенту в подготовке к сдаче зачёта и экзамена.

УДК 519.21(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2023

Оглавление

§1. Основные понятия, определения и теоремы

A, B, C, … - события.

Событие $A1 + A2 + \ldots + An$ означает наступление или $A1$, или $A2, \ldots$, или An.

Событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ означает наступление и $A1$, и $A2, \ldots$, и An.

Событие $\acute{A}$ - противоположное событию А.

$C_n^к = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - формула комбинаторики (число сочетаний).

<u>Классическое определение вероятности</u>

$P(A) = \frac{m}{n}$,

где n - число равновозможных, единственно возможных и несовместимых исходов;

m – число исходов из числа n, благоприятствующих событию A.

<u>Теорема сложения вероятностей для несовместимых событий</u>

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

<u>Теорема сложения вероятностей для независимых событий</u>

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

<u>Теорема умножения вероятностей для зависимых событий</u>

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1A2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A1A2\ldots A_{n-1}}(A_n).$$

<u>Вероятность появления хотя бы одного события</u>

$$P(A) = 1 - P(\acute{A}_1 \cdot \acute{A}_2 \cdot \ldots \cdot \acute{A}_n).$$

Пример 1

В пачке 10 тетрадей, из которых 6 тетрадей в клетку, а остальные тетради в линейку. Найти вероятность того, что среди одновременно наудачу взятых из пачки трёх тетрадей в клетку будет:

а) три тетради;
б) только одна тетрадь;
в) хотя бы одна тетрадь.

Решение:

Обозначим искомые события:

А – три тетради в клетку;
В – только одна тетрадь в клетку;
С – хотя бы одна тетрадь в клетку.

A_1, A_2, A_3 – события, состоящие в том, что, соответственно первая, вторая и третья тетради будут в клетку.

а) $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1A2}(A_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$.

Другой способ решения:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^3 \cdot C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{20 \cdot 1}{120} = \frac{1}{6}$, т.к.

$\mathrm{C}_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20,$

$\mathrm{C}_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} =$ /т.к. $0! = 1$ / $= 1,$

$\mathrm{C}_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{6 \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$

б) $B = A_1 \cdot \acute{A}_2 \cdot \acute{A}_3 + \acute{A}_1 \cdot A_2 \cdot \acute{A}_3 + \acute{A}_1 \cdot \acute{A}_2 \cdot A_3,$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A1}(\acute{A}_2) \cdot P_{A1\acute{A}2}(\acute{A}_3) + P(\acute{A}_1) \cdot P_{\acute{A}1}(A_2) \cdot P_{\acute{A}1A2}(\acute{A}_3) + P(\acute{A}_1) \times\times P_{\acute{A}1}(\acute{A}_2) \cdot P_{\acute{A}1\acute{A}2}(A_3)$$
$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Другой способ решения:

Р (В) $= \frac{m}{n} = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0{,}3$, т.к.

$C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6,$

$\mathrm{C}_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6,$

$\mathrm{C}_{10}^3 = 120.$

в)Р(С) = 1 – Р(Ć) = 1 – Р($\acute{A}_1 \cdot \acute{A}_2 \cdot \acute{A}_3$) = 1 – Р($\acute{A}_1$) $\mathrm{P}_{\acute{A}_1}(\acute{A}_2) \cdot \mathrm{P}_{\acute{A}_1\acute{A}_2}(\acute{A}_3) =$

$=1 \frac{-4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0{,}967.$

Пример 2.

В мешке находятся нити трёх цветов, из которых 20% белых, 30% зелёных и 50% красных. Наудачу берутся нити. Какова вероятность того, что все они будут одного цвета?

Решение:

Обозначим через $\mathrm{Б}_1$, $\mathrm{З}_1$, $\mathrm{К}_1$ следующие события: первая взятая нить окажется соответственно белого, зелёного, красного цвета.

Аналогично $\mathrm{Б}_2, \mathrm{Б}_3, \mathrm{З}_2, \mathrm{З}_3, \mathrm{К}_2, \mathrm{К}_3$.

Событие А означает, что все три взятые наудачу нити окажутся одного цвета.

А = $\mathrm{Б}_1 \cdot \mathrm{Б}_2 \cdot \mathrm{Б}_3 \cdot \mathrm{З}_1 \cdot \mathrm{З}_2 \cdot \mathrm{З}_3 \cdot \mathrm{К}_1 \cdot \mathrm{К}_2 \cdot \mathrm{К}_3,$

Р(А) = Р($\mathrm{Б}_1$)$\cdot P(\mathrm{Б}_2) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{Б}_3) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{З}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{З}_2) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{З}_3) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{К}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{К}_2) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{К}_3).$

Так как

$P(Б_1) = P(Б_2) = P(Б_3) = \frac{20}{100} = 0{,}2;$
$P(З_1) = P(З_2) = P(З_3) = \frac{30}{100} = 0{,}3;$
$P(К_1) = P(К_2) = P(К_3) = \frac{50}{100} = 0{,}5;$
Получаем искомую вероятность:

$P(A) = (0{,}2)^3 + (0{,}3)^3 + (0{,}5)^3 = 0{,}008 + 0{,}027 + 0{,}125 = 0{,}16.$

Пример 3.

Студенту на экзамене предложено 2 из 50 вопросов экзаменационной программы. Какова вероятность того, что студент знает ответы:
а) на оба вопроса;
б) только на один вопрос;
в) хотя бы на один вопрос.
Решение:
Обозначим искомые события:
А – студент знает ответы на оба вопроса;
В – знает ответ только на один вопрос;
С – знает ответ хотя бы на один вопрос
A_1- знает ответ на первый вопрос;
A_2- знает ответ на второй вопрос.
а) $A = A_1 \cdot A_2$,
$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) = \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} = \frac{156}{245} \approx 0{,}64.$
Другой способ решения:
$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_{10}^0}{C_{50}^2} = \frac{780 \cdot 1}{1225} = \frac{156}{254} \approx 0{,}64;$
$C_{40}^2 = \frac{40!}{2!(40-2)!} = \frac{40!}{2 \cdot 38!} = \frac{39 \cdot 40}{2} = 780;$
$C_{10}^0 = \frac{10!}{0!(10-0)!} = \frac{10!}{1 \cdot 10!} = 1;$
$C_{50}^2 = \frac{50!}{2! \cdot (50-2)!} = \frac{50!}{2 \cdot 48!} = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225.$
б) $B = A_1 \cdot \acute{A}_2 + \acute{A}_1 \cdot A_2$,
$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A1}(\acute{A}_2) + P(\acute{A}_1) \cdot P_{\acute{A}1}(A_2) = \frac{40}{50} \cdot \frac{10}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{49} =$

$= 2 \cdot \frac{40 \cdot 10}{50 \cdot 49} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 49} = \frac{80}{245} \approx 0{,}33.$

Другой способ решения:
$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_{40}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{50}^2} = \frac{40 \cdot 10}{1225} = \frac{400}{1225} = \frac{80}{245} \approx 0{,}33,$
$C_{40}^1 = \frac{40!}{1!(40-1)!} = \frac{40!}{1 \cdot 39!} = 40,$
$C_{10}^1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{1 \cdot 9!} = 10,$
$C_{50}^2 = 1225.$
в) $P(C) = 1 - P(\acute{C}) = 1 - P(\acute{A}_1 \cdot \acute{A}_2) = 1 - P(\acute{A}_1) \cdot P_{\acute{A}_1}(\acute{A}_2) = 1 - \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} =$
$= 1 - \frac{9}{245} = 1 - \frac{9}{245} = \frac{236}{245} \approx 0{,}96.$

Задачи для самостоятельного решения

1. В наборе 8 белых и 12 чёрных шаров. Наугад извлекают 2 шара. Найти вероятность того, что:
а) оба шара белые;
б) только один шар чёрный;
в) хотя бы один шар белый.
2. В первой группе 17 студентов, во второй группе 14 студентов. Вероятность сдачи экзамена каждым студентом 0,75. Из каждой группы выбирают по одному студенту. Найти вероятность того, что:
а) они оба сдадут экзамен;
б) только один сдаст экзамен;
в) хотя бы один сдаст экзамен
3. В магазин поступило 35 телевизоров, из которых 3 требует регулировки. Какова вероятность того, что из двух отобранных телевизоров регулировки потребует:
а) 2 телевизора;
б) только один телевизор;
в) хотя бы один телевизор?
4. Бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность появления:
а) двух четверок;
б) одной четверки;
в) хотя бы одной четверки?
5. В магазин поступило 10 радиоприемников, из которых 4 требует регулировки. Какова вероятность, что из двух отобранных радиоприемников потребуют регулировки:
а) два;
б) только один;
в) хотя бы один?
6. В круг наугад брошены 2 точки (рис. 1). Найти вероятность того, что в заштрихованную область попадут:

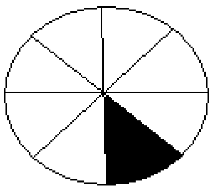


Рисунок 1

а) две точки;
б) только одна точка;
в) хотя бы одна точка.
7. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна $\frac{1}{6}$. Куплено 2 билета. Какова вероятность того, что выигрышными являются:

а) оба билета;
б) только один билет;
в) хотя бы один билет?
8. В 1-ом наборе 18 деталей, из них 3 нестандартных, во 2-ом 15 деталей, из них 3 нестандартных. Из каждого набора вынимают по одной детали. Найти вероятность, что:
а) обе детали нестандартны;
б) только 1 деталь нестандартна;
в) хотя бы одна деталь нестандартна.
9. Из 17 изделий 1-ого вида 15 стандартных, а из 12 изделий 2-ого вида 10 нестандартных. Берут по одному изделию каждого вида. Какова вероятность, что:
а) взяты 2 нестандартных изделия;
б) только 1 нестандартное изделие;
в) хотя бы одно нестандартное изделие.
10. В первой коробке 10 шаров из них 7 красных, во второй коробке 15 шаров из них 8 красных. Из каждой коробки извлекают по одному шару. Найти вероятность, что:
а) они оба красные;
б) только один шар красный;
в) хотя бы один шар красный.
11. В среднем 90% выпускаемых деталей являются стандартными. Найти вероятность того, что среди взятых двух деталей нестандартных будет:
а) две;
б) только одна;
в) хотя бы одна.
12. Вероятность выигрыша по лотерейному билету $\frac{1}{7}$. Куплено 2 билета. Какова вероятность выигрыша:
а) двух билетов;
б) только одного;
в) хотя бы одного билета.
13. В квадрат наугад брошены 2 точки (рис. 2). Найти вероятность того, что в заштрихованную область попадут:

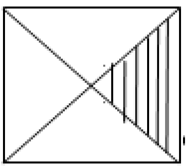


Рисунок 2

а) две точки;
б) только одна точка;
в) хотя бы одна точка.
14. Бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность появления:
а) двух пятёрок;

б) одной пятёрки;
в) хотя бы одной пятёрки.
15. В первой группе 20 студентов, во второй 22 студента. Вероятность сдачи экзамена каждым студентом первой группе 0,8, а во второй группе 0,75. Из каждой группы выбирают по одному студенту. Какова вероятность того, что экзамен не сдадут:
а) оба студента;
б) только один студент;
в) хотя бы один студент.
16. В круг наугад брошены 2 точки. Вероятность попадания первой точки 0,77, а второй 0,91. Найти вероятность того, что в круг попадут:
а) две точки;
б) только одна точка;
в) хотя бы одна точка.
17. В магазин поступило 13 микроволновых печей, из которых 5 требуют доукомплектовки. Какова вероятность того, что из двух отобранных микроволновок полный комплект содержат:
а) две;
б) только одна;
в) хотя бы одна.
18. В среднем 85% выпускаемых деталей являются стандартными. Найти вероятность того, что среди взятых двух деталей стандартами будет:
а) две;
б) только одна;
в) хотя бы одна.
19. В коробке 9 теннисных мечей, из которых 5 зеленого цвета, а 4 желтого цвета. Наугад берут 2 мяча. Какова вероятность, что:
а) оба мяча зеленых;
б) только один желтый;
в) хотя бы один зеленый мяч.
20. Вероятность решения первой задачи 0,8, а второй 0,85. Какова вероятность решения:
а) двух задач;
б) только одной задачи;
в) хотя бы одной задачи.

§2. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

2.1 Формула полной вероятности

Вероятность события А, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместимых событий (гипотез) $\text{B}_1, \text{B}_2, \dots, \text{B}_n$,образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:
$\text{P(A)} = \text{P}(\text{B}_1) \cdot \text{P}_{B1}(\text{A}) + \text{P}(\text{B}_2) \cdot \text{P}_{B2}(\text{A}) + \dots + \text{P}(\text{B}_n) \cdot \text{P}_{Bn}(\text{A})$,
где $\text{P}(\text{B}_1 + \text{P}(\text{B}_2) + \dots + \text{P}(\text{B}_n) = 1$.
Данное равенство называют <u>формулой полной вероятности.</u>

Пример 1.
Литье в болванках поступает из 2-х цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом продукция первого цеха имеет 10% брака, а второго 20%. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка имеет дефект.
Решение:
Гипотезы: B_1 - болванка из первого цеха; B_2 - болванка из второго цеха
$\text{P} (\text{B}_1) = \frac{70}{100} = 0{,}7$;
$\text{P} (\text{B}_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3$;
$\text{P} (\text{B}_1) + \text{P} (\text{B}_2) = 0{,}7 + 0{,}3 = 1$.
Событие А – взятая наугад болванка имеет дефект.
Условие вероятности:
$\text{P}_{B1}(\text{A}) = \frac{10}{100} = 0{,}1$ – дефект имеет болванка из 1 цеха;
$\text{P}_{B2}(\text{A}) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ - дефект имеет болванка из 2 цеха.
Применяем формулу полной вероятности
$\text{P(A)} = \text{P}(\text{B}_1) \cdot \text{P}_{B1}(\text{A}) + \text{P}(\text{B}_2) \cdot \text{P}_{B2}(\text{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}07 + 0{,}06 = 0{,}13$ (в среднем 13% болванок в цехе дефекты).

Пример 2.Определить вероятность того, что путник, вышедший из пункта А, попадет в пункт Н, если на развилке дорог он наугад выбирает любую дорогу (кроме обратной). Схема дорог указана на рисунке 3.

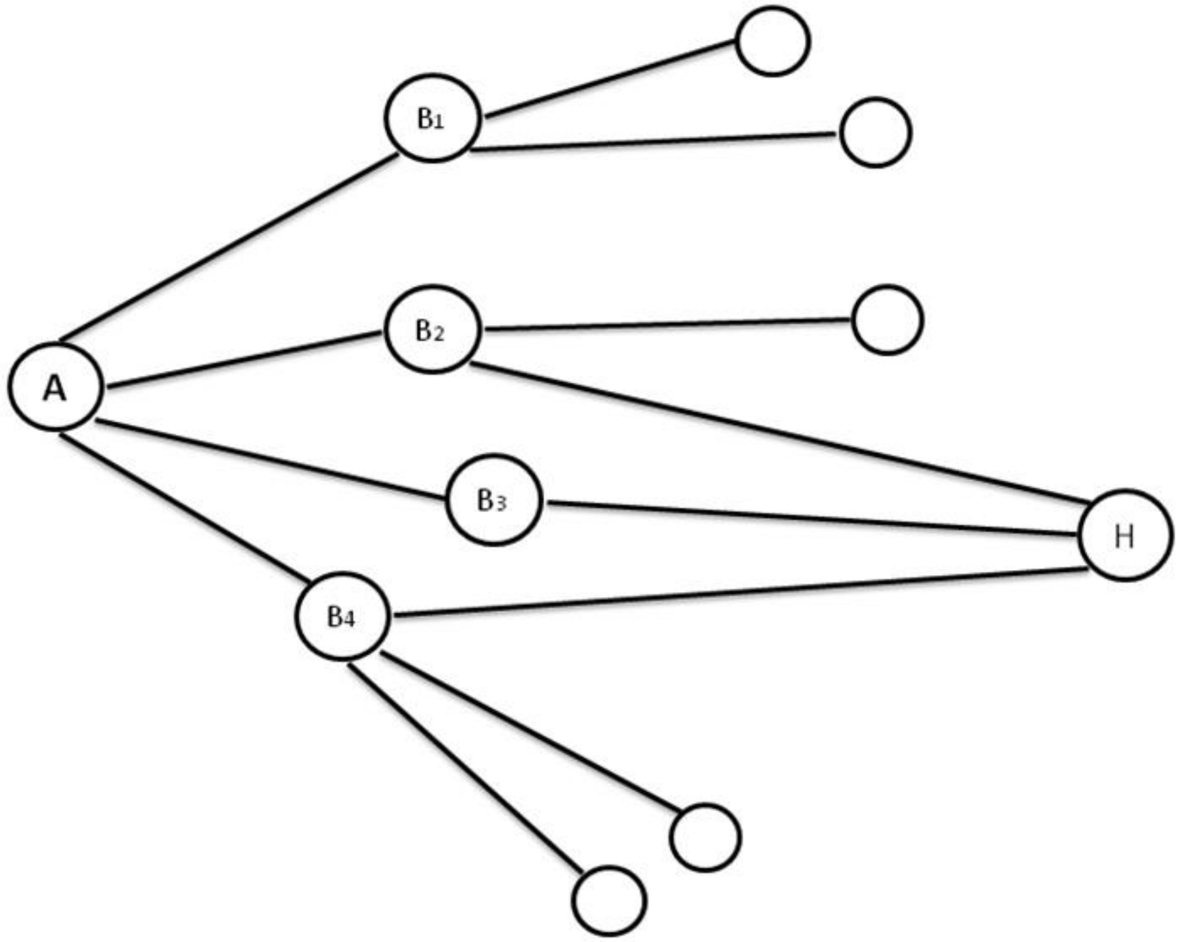


Рисунок 3

Решение:

Пусть приходы путника в пункты $В_1, В_2, В_3, В_4$ будут соответствующими гипотезами. Очевидно, они образуют полную группу событий и по условию задачи

$$P(B_1) = \mathrm{P(B_2)} = \mathrm{P(B_3)} = \mathrm{P(B_4)} = 0{,}25$$

(Все направления из А для путника равновозможны). Согласно схеме дорог условные вероятности попадания в Н при условии, что путник прошел через B_j, равны.

$$\mathrm{P}_{B1}(\mathrm{H}) = 0, \mathrm{P}_{B2}(\mathrm{H}) = \frac{1}{2}, \mathrm{P}_{B3}(\mathrm{H}) = 1, \mathrm{P}_{B4}(\mathrm{H}) = \frac{1}{3}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим:

$$\begin{aligned} P(H) = P(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B1}(\mathrm{H}) + \mathrm{P(B_2)} \cdot \mathrm{P}_{B2}(\mathrm{H}) + \mathrm{P(B_3)} \cdot \mathrm{P}_{B3}(\mathrm{H}) + \mathrm{P(B_4)} \cdot \mathrm{P}_{B4}(\mathrm{H}) = \\ = 0{,}25 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}25 \cdot 1 + +0{,}25 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}25 \cdot \left(0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}\right) \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{3+6+2}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

Пример 3.

В магазине имеются телевизоры с трех заводов. Причем с первого завода телевизоров в три раза больше, чем со второго завода. А с третьего завода в два раза больше, чем со второго завода. Вероятность того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течении гарантийного срока, равны 0,96; 0,84; 0,90 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Решение:

Пусть события А – телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Гипотезы: B_1 - телевизор изготовлен на 1-м заводе,

B_2 - на 2-м заводе,

B_3 - на 3-м заводе.

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1.$

Пусть $P(B_2) = x$, тогда $P(B_1) = 3x$; $P(B_3) = 2x$, подставляем в уравнение:

$3x + x + 2x = 1$,

$6x = 1$,

$x = \frac{1}{6}$.

Следовательно $P(B_2) = \frac{1}{6}$;

$P(B_1) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$;

$P(B_3) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Условные вероятности:

$P_{B1}(A) = 0{,}96$ - вероятность того, что телевизор с первого завода выдержит гарантийный срок службы;

$P_{B2}(A) = 0{,}84$ - со второго завода выдержит гарантийный срок;

$P_{B3}(A) = 0{,}96$ - с третьего завода выдержит гарантийный срок.

Применяем формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B3}(A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}96 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}84 +$$

$\frac{+1}{3} \cdot 0{,}90 = 0{,}48 + 0{,}14 + 0{,}3 = 0{,}92.$

2.2 Формула Бейеса

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместимых событий (гипотез) $B_1, B_2, \dots, B_n$,которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса

$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$, (i = 1, 2, …, n),

где $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A) -$ формула полной вероятности.

Пример 1

В одном из трех ящиков 6 белых и 4 черных шарика, во втором 7 белых и 3 черных, в третьем – только 8 белых. Наугад выбираем один из трех ящиков, и из него снова наугад выбираем один шарик. Он оказался белым. Какова вероятность того, что этот шарик вынут из второго ящика?

Решение:

Гипотезы: B_1 – наугад выбран первый ящик,

B_2 – наугад выбран второй ящик,

B_3– наугад выбран третий ящик,

ясно, что $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$

Событие А – наугад вынут белый шарик.

Условные вероятности:

$P_{B1}(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{6+4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ – вероятность извлечения белого шарика из первого ящика,

$P_{B2}(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{7+3} = \frac{7}{10}$ – вероятность белого шара из второго ящика,

$P_{B3}(A) = \frac{8}{8} = 1$ - вероятность белого шара из третьего ящика.

По формулам Бейеса искомая вероятность

$$P_A(B_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + 1\right)} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{6+7+10}{10}} =$$

$$\frac{7}{10} \div \frac{23}{10} = \frac{7}{10}\cdot\frac{10}{23} = \frac{7}{23}.$$

Пример 2

На сборку поступают детали из трех цехов в пропорции 1:3:6. При этом вероятности брака в каждом из этих цехов соответственно равны 0,07; 0,01; 0,09. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь, оказавшаяся бракованной, изготовлена в третьем цехе.

Решение:

Гипотезы: B_1 – взятая наудачу деталь изготовлена первым цехом,

B_2 – взятая наудачу деталь изготовлена вторым цехом,

B_3 – третьим цехом.

$$P\ (B_1) = \frac{1}{1+3+6} = \frac{1}{10};$$

$$P(B_2) = \frac{3}{1+3+6} = \frac{3}{10};$$

$$P\ (B_3) = \frac{6}{1+3+6} = \frac{6}{10}.$$

$P(B_1 + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} = 1.$

Событие А – взятая наудачу деталь бракованная.

Условия вероятности:

$P_{B1}(A) = 0{,}07$ - бракованная деталь из первого цеха,

$P_{B2}(A) = 0{,}01$ – бракованная деталь из второго цеха,

$P_{B3}(A) = 0{,}09$ – бракованная деталь из третьего цеха.

По формуле Бейеса искомая вероятность

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)\cdot P_{B3}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B3}(A)} = \frac{\frac{6}{10}\cdot 0{,}09}{\frac{1}{10}\cdot 0{,}07 + \frac{3}{10}\cdot 0{,}01 + \frac{6}{10}\cdot 0{,}09} =$$

$$= \frac{0{,}6\cdot 0{,}09}{0{,}1\cdot 0{,}07 + 0{,}3\cdot 0{,}01 + 0{,}6\cdot 0{,}09} = \frac{0{,}054}{0{,}007 + 0{,}003 + 0{,}054} = \frac{0{,}054}{0{,}064} = 0{,}84375 \approx 0{,}84.$$

Пример 3

Из 12 студентов, которые пришли на экзамен по истории, четверо подготовились отлично, пятеро хорошо, двое удовлетворительно, а один совсем не готовился – понадеялся на то, что все помнит. Отлично подготовившиеся студенты могут ответить на все 25 вопросов, хорошо – на 20 вопросов, удовлетворительно – на 13 и не подготовившиеся – на 5 вопросов. Каждый студент получает наугад 2 вопроса из 25. Приглашенный первый студент ответил на один вопрос. Какова вероятность того, что это тот студент, который не готовился к экзамену?

Решение:

Гипотезы: В_1 – приглашён студент, подготовившийся на отлично,
В_2 – приглашён студент, подготовившийся на хорошо,
В_3 – приглашён студент, подготовившийся на удовлетворительно,
В_4 – приглашённый студент к экзамену не готов.

$P(\text{В}_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;
$P(\text{В}_2) = \frac{5}{12}$;
$P(\text{В}_3) = \frac{2}{12}$;
$P(\text{В}_4) = \frac{1}{12}$;

$$P(\text{В}_1) + P(\text{В}_2) + P(\text{В}_3) + P(\text{В}_4) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4+5+2+1}{12} = 1.$$

Событие А – приглашенный студент ответил на один из двух предложенных вопросов.

Условие вероятности:

$P_{\text{В}1}(A) = \frac{m}{n} = 0$– невозможное событие, он знает ответы на все вопросы,

$P_{\text{В}2}(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{20}^1 \cdot C_5^1}{C_{25}^2} = \frac{20\cdot 5}{12\cdot 25} = \frac{4\cdot 5\cdot 5}{12\cdot 25} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

$P_{\text{В}3}(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_{12}^1}{C_{25}^2} = \frac{13\cdot 12}{12\cdot 25} = \frac{13}{25}$,

$P_{\text{В}4}(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^1 \cdot C_{20}^1}{C_{25}^2} = \frac{5\cdot 20}{12\cdot 25} = \frac{5\cdot 4\cdot 5}{12\cdot 25} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний (! – факториал; n! = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$),

$C_{25}^2 = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{25!}{2!\cdot 23!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 23\cdot 24\cdot 25}{12\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 23} = \frac{24\cdot 25}{2} = 12\cdot 25$,

$$C_{20}^1 = \frac{20!}{1!\,(20-1)!} = \frac{20!}{1!\cdot 19!} = 20,$$

$C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$,

$C_{13}^1 = \frac{13!}{1!(13-1)!} = \frac{13!}{1!\cdot 12!} = 13$,

$C_{12}^1 = \frac{12!}{1!(12-1)!} = \frac{12!}{1!\cdot 11!} = 12$.

По формуле Бейеса имеем

$$P_A(\text{В}_4) = \frac{P(\text{В}_4)\cdot P_{\text{В}4}(A)}{P(\text{В}_1)\cdot P_{\text{В}1}(A) + P(\text{В}_2)\cdot P_{\text{В}2}(A) + P(\text{В}_3)\cdot P_{\text{В}3}(A) + P(\text{В}_4)\cdot P_{\text{В}4}(A)} = \frac{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{12}\cdot\frac{13}{25} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{5}{3} + \frac{26}{25} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{3} + \frac{26}{25}} = \frac{\frac{1}{3}}{2 + \frac{26}{25}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{50+26}{25}} = \frac{1}{3} \div \frac{76}{25} = \frac{1}{3}\cdot\frac{25}{76} = \frac{25}{228} \approx 0{,}1096.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В первом ящике 20 деталей, из них 1 нестандартная; во втором-25, из них 2 нестандартных. Наугад выбирают ящик и из него извлекают 1 деталь. Найти вероятность того, что она нестандартная; что она извлечена из первого ящика.
2. В первом ящике 10 деталей, из них 9 стандартных; во втором – 15, из них 13 стандартных. Наугад выбирают ящик и из него извлекают 1 деталь. Найти вероятность того, что она нестандартная; что она извлечена из первого ящика
3. В первой группе 20 студентов, во второй – 15. Вероятность сдачи экзамена каждым студентом равна 0,8. Наугад выбирают группу и из нее одного студента. Он сдал экзамен. Найти вероятность того, что он из первой группы.
4. В первой группе 10 студентов, во второй – 15. Вероятность сдачи экзамена каждым студентом равна 0,7. Наугад выбирают группу и из нее одного студента. Он сдал экзамен. Найти вероятность того, что он из второй группы.
5. На сборку поступило 20 деталей с первого станка, из которых 2 нестандартных и 15 деталей со второго станка, из которых 2 нестандартных. Случайно взятая деталь оказалась нестандартной. Какова вероятность, что она изготовлена на 1-ом станке?
6. На сборку поступило деталей с первого станка в два раза больше, чем со второго. Вероятность изготовления бракованной детали на 1-ом станке – 0,01, на 2-ом – 0,05. Какова вероятность того, что взятая деталь является бракованной? Какова вероятность, что бракованная деталь со второго станка?
7. На сборку поступило 15 деталей с первого станка, из которых 2 нестандартных и 25 деталей со второго станка, из которых 3 нестандартных. Случайно взятая деталь оказалась нестандартной. Какова вероятность, что она изготовлена на 2-ом станке?
8. На сборку поступило деталей с первого станка в три раза больше, чем со второго. Вероятность изготовления бракованной детали на 1-ом станке – 0,02, на 2-ом – 0,04. Какова вероятность того, что взятая деталь является бракованной? Какова вероятность, что бракованная деталь со второго станка?
9. Магазин получил 2 партии обуви, причем в 1-ой партии обуви в 2 раза больше, чем во 2-ой. 10% обуви в 1-ой партии и 6% во 2-ой имеют различные дефекты. Какова вероятность, что взятая пара обуви имеет дефект? Какова вероятность, что пара с дефектом из 1-ой партии?
10. Студент знает 20 из 25 вопросов 1-ой темы и 5 из 10 вопросов 2-ой темы. Наугад выбирают тему и из нее 1 вопрос. Известно, что студент не ответил. Найти вероятность, что ему предложен вопрос из 2-ой темы.

11. Магазин получил 2 партии обуви, причем в 1-ой партии обуви в 3 раза больше, чем во 2-ой. 10% обуви в 1-ой партии и 4% во 2-ой имеют различные дефекты. Какова вероятность, что взятая пара обуви имеет дефект? Какова вероятность, что пара с дефектом из 1-ой партии?
12. Студент знает 15 из 20 вопросов 1-ой темы и 5 из 10 вопросов 2-ой темы. Наугад выбирают тему и из нее 1 вопрос. Найти вероятность, что студент ответит на предложенный вопрос. Найти вероятность, что студент ответит на вопрос из 2-й темы.
13. В первой коробке 10 шаров, из них 6 красных, во 2-ой – 12 шаров, из них 8 красных. Наугад выбирают коробку и из нее извлекают 1 шар. Шар оказался красный. Какова вероятность, что выбранный шар из первой коробки?
14. В 1-ом наборе 18 деталей, из них 3 нестандартных, во 2-ом – 15, из них 3 нестандартных. Наугад выбирают 1 набор и из него вынимают 1 деталь. Деталь оказалась нестандартная. Какова вероятность того, что выбранная деталь из первого набора?
15. Из 16 изделий 1-го вида 4 нестандартные, а из 12 изделий 2-го вида – 3 нестандартные. Наугад выбирают вид изделий и затем одно изделие. Оно оказалось нестандартным. Какова вероятность того, что выбранное изделие второго вида?
16. В 1-ой группе 12 студентов, во 2-ой – 15. Вероятность сдачи экзамена для студента1-ой группы равна 0,7, для 2-ой – 0,8. Наугад выбирают группу из нее одного студента. Студент сдал экзамен Какова вероятность, что выбранный студент из второй группы?
17. В первой коробке 9 шаров, из них 6 красных, во 2-ой – 15 шаров, из них 8 красных. Наугад выбирают коробку и из нее извлекают 1 шар. Выбранный шар оказался красный. Какова вероятность, что выбранный шар из первой коробки?
18. В 1-ом наборе 15 деталей, из них 3 нестандартных, во 2-ом – 18, из них 2 нестандартных. Наугад выбирают 1 набор и из него вынимают 1 деталь. Какова вероятность, что она нестандартная?
19. Из 20 изделий 1-го 4 нестандартные, а из 15 изделий 2-го вида – 3 нестандартные. Наугад выбирают вид изделий и затем одно изделие. Оно оказалось нестандартным. Какова вероятность того, что оно 1-го вида?
20. В 1-ой группе 15 студентов, во 2-ой – 18. Вероятность сдачи экзамена для студента 1-ой группы равна 0,8, для 2-ой – 0,6. Наугад выбирают группу из нее одного студента. Какова вероятность, что он сдаст экзамен? Какова вероятность, что этот студент из 1-ой группы?

§3. Формула Бернулли

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступает ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$P_n(K) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ – противоположная вероятность.
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний (! – факториал, n! = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, 0! = 1$).
Вероятность того, что в n испытаниях события наступает:
1) менее к раз: $P_n(O) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$;
2) более к раз: $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$;
3) не менее к раз: $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$;
4) не более к раз: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$;
5) хотя бы к раз: $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$.

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступление события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях $К_0$ раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.
Наивероятнейшее число $К_0$ определяют из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 < np + p,$$

причем:
а) если чисто np - q – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;
б) если число np – q – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: $k_0 и k_0 + 1$;
в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример 1
В магазин зашли 10 покупателей. Найти вероятность того, что два из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0,25.
Решение:
Здесь n = 10; p = 0,25 = $\frac{1}{4}$; q = 1 – p = 1 – 0,25 = 0,75 = $\frac{3}{4}$; k = 2.

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^{10-2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

Пример 2
Вероятность попадания в мишень одним выстрелом $\frac{1}{7}$. Какова вероятность того, что из 9 выстрелов мишень будет поражена менее 3 раз.
Решение:
Здесь n = 9; p = $\frac{1}{7}$; q = 1 - p = 1 - $\frac{1}{7} = \frac{6}{7}$, k< 3.

$$P_9(k<3) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) = C_9^0 \cdot p^0 \cdot q^{9-0} + C_9^1 \cdot p^1 \cdot q^{9-1} + +C_9^2 \cdot p^2 \cdot q^{9-2} =$$
$$= \frac{9!}{0!\,(9-0)!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 + \frac{9!}{1!\,(9-1)!} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^8 + \frac{9!}{2!\,(9-2)!} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7$$

Пример 3:

Четыре процента деталей, изготовляемых в цехе, обычно бракуются. Для контроля было взято 6 деталей. Какова вероятность того, что среди них не более одной бракованной? Нет бракованных?

Решение:

Здесь n = 6; p = $\frac{4}{100} = 0{,}04$;q = 1 – p = 0,96

1) k≤ 1,

$$P_6(k \leq 1) = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^{6-0} + \frac{6!}{0!\,(6-0)!} \cdot 1 \cdot (0{,}96)^6 +$$

$$+\frac{+6!}{1!\,(6-1)!} \cdot 0{,}04 \cdot (0{,}96)^5 = (0{,}96)^6 + 6 \cdot 0{,}04 \cdot (0{,}96)^5 = (0{,}96)^5 \cdot (0{,}96 + 6 \times 0{,}04) \approx 0{,}8154 \cdot 1{,}2$$

$$= 0{,}97848 \approx 0{,}98.$$

2) k=0,

$P_6(0) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^{6-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}96)^6 \approx 0{,}78.$

Пример 4

В устройстве 8 датчиков. Для любого из них вероятность, что он будет исправным в течении года 0,8. Какова вероятность того, что в течении года хотя бы один датчик выйдет из строя?

Решение:

Здесь n = 8; p = 0,2 (вероятность выхода из строя датчика)

q = 1 - p = 1 – 0,2 = 0,8; k≥ 1

$P_8(k \geq 1) = P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) + \cdots + P_8(8) = 1 - P_8(k < 1) = 1 - P_8(0) =$

$$1 - C_8^0 \cdot p^0 \cdot q^{8-0} = \frac{8!}{0!\,(8-0)!} \cdot 1 \cdot (0{,}8)^8 = (0{,}8)^8 \approx 0{,}17.$$

Пример 5

Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0,1. Найти наивероятнейшее число попаданий колец на колышек при семи бросках. И найти вероятность этого события.

Решение:

Здесь n = 7; p = 0,6; q = 1 – p =0,4;

np - q$\leq k_0 < np + p$;

$7 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \leq k_0 < 7 \cdot 0{,}6 + 0{,}6;$

$3{,}8 \leq k_0 < 4{,}8;$

$k_0 = 4.$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^3 \approx$$

$\approx 35 \cdot 0{,}008 = 0{,}28.$

Задачи для самостоятельного решения

1. В телевизоре 7 ламп. Вероятность того, что в течение года лампа останется исправной, равна 0,9. Найти вероятность того, что в течение года из строя выйдет не более 1-ой лампы.

2. В телевизоре 5 ламп. Вероятность того, что в течение года лампа останется исправной, равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение года из строя выйдет не более 2-х ламп.
3. В радиоприемнике 6 ламп. Вероятность выхода лампы из строя в течение года равна 0,2. Какова вероятность того, что в течение года из строя выйдет менее 3-х ламп.
4. В радиоприемнике 8 ламп. Вероятность выхода лампы из строя в течение года равна 0,2. Какова вероятность того, что в течение года из строя выйдет менее 2-х ламп.
5. В телевизоре 8 ламп. Вероятность того, что в течение года лампа останется исправной, равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение года из строя выйдет не более 2-х ламп.

Задачи с 6 по 10 (в условии задачи n соответствует номеру задачи):

Монета подброшена n+3 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет менее двух раз.

Задачи с 11 по 20 (в условии задачи n соответствует номеру задачи):

В среднем 80% саженцев приживаются. Найти вероятность того, что из n-7 саженцев приживется не менее двух.

§ 4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

1. Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступает ровно к раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равны (тем точнее, чем более n)

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$,

здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x) = \varphi(-x)$ четная). При $x > 5$ значение функции берут равным нулю, т.е. $\varphi(x) = 0$.

2. Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, то в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступает не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближённо равна

$P(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_2)$,

здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-(z^2/2)}dz$- функция Лапласа,

$x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица функции Лапласа для положительных значений $x(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении 2;

Для значений $x > 5$ полагают Ф(x)=0,5. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечётная

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Пример 1

Вероятность получения по лотерее проигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 500 наугад купленных билетов:

1. билетов без выигрыша будет 51;
2. билетов без выигрыша будет не менее 48 и не более 55.

Решение:

Здесь n = 500, p = 0,1 , q = 1 – p = 1 – 0,1 = 0,9.

1. k = 51,

$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{51-500\cdot 0{,}1}{\sqrt{500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{1}{\sqrt{45}} \approx 0{,}15$,

$\varphi(0{,}15) = 0{,}3945$ приложение 1.

$P_{500}(51) = \frac{1}{\sqrt{500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\varphi(0{,}15) = \frac{1}{\sqrt{45}}\cdot 0{,}3945 \approx 0{,}059.$

2. $k_1 = 48, k_2 = 55$,

$x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{48-500\cdot 0{,}1}{\sqrt{500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{-2}{\sqrt{45}} \approx -0{,}30$; $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{55-500\cdot 0{,}1}{\sqrt{500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{5}{\sqrt{45}} \approx 0{,}75.$

Ф(-0,30) = - 0,1179,   Ф(0,75) = 0,2734 (приложение 2).

P (48; 55) = Ф(0,75) – Ф(- 0,30) = Ф(0,75) + Ф (0,30) = 0,2734 +0,1179 = 0,3913.

Пример 2

На сборы приглашены 120 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив равна 0,7. Определить вероятность того, что:

1. выполнит норматив ровно 80 спортсменов;
2. выполнит норматив не менее 80.

Решение:

Здесь n = 120,   p = 0,7,   q = 1 – p = 1 - 0,7 = 0,3.

1. k = 80,

$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-120\cdot 0{,}7}{\sqrt{120\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}} = \frac{-4}{\sqrt{25{,}2}} \approx -0{,}80$,

$\varphi(-0{,}80) = \varphi(0{,}80) = 0{,}2897$ (приложение 1).

$P_{120}(80) = \frac{1}{\sqrt{120\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\cdot\varphi(-0{,}80) = \frac{1}{\sqrt{25{,}2}}\cdot 0{,}2897 \approx 0{,}06.$

2. $k_1 = 80, k_2 = 120$,

$x_1 \approx -0{,}80$ смотри пункт 1,

$x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{120-120\cdot 0{,}7}{\sqrt{120\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}} = \frac{36}{\sqrt{25{,}2}} \approx 7{,}17$,

Ф(x_1) = Ф(- 0,80) = - 0,2881 (приложение 2),

Ф(x_2) = Ф(7,17) = 0,5 ,   т.к. $x_2 > 5$,

$P_{120}(80; 120) = \Phi(7{,}17) - \Phi(-0{,}80) = 0{,}5 + 0{,}2881 = 0{,}7881.$

Пример 3

К магистральному водопроводу подключены 160 предприятий, каждое из которых с вероятность 0,75 в данный момент времени осуществляет отбор воды. Найти вероятность того, что:

1. в этот момент забор воды производят 100 предприятий;
2. забор воды производят не менее 90 и не более 140 предприятий.

Решение:

Здесь n = 160,   p = 0,75,   q = 1- p = 1 – 0,75 = 0,25.

1. $k_1 = 100$,

$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-160\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-20}{\sqrt{18{,}75}} \approx -4{,}62$,

$\varphi(-4{,}62) = \varphi(4{,}62) = 0{,}00001$ (приложение 1).

$k_1 = 90, k_2 = 140$,

$x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{90-160\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-30}{\sqrt{18{,}75}} \approx -6{,}93$,

$x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{140-160\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{20}{\sqrt{18{,}75}} \approx -4{,}62$,

Ф(-6,93) = - Ф(6,93) = -0,5, т.к. $x_1 > 5$,

Ф(4,62) = 0,499998 (приложение 2).

$P_{160}(90; 140) = \Phi(4{,}62) - \Phi(-6{,}93) = 0{,}499998 + 0{,}5 \approx 1.$

Задачи для самостоятельного решения

1. В среднем 90% выпускаемых изделий являются стандартными. Найти вероятность того, что среди отобранных 400 для проверки изделий, нестандартных будет: а) 40, б) от 34 до 50.
2. В среднем 90% выпускаемых изделий являются стандартными. Найти вероятность того, что среди отобранных 400 для проверки изделий, нестандартных будет: а) 360, б) от 360 до 375.
3. В среднем 75% изготавливаемых деталей являются стандартными. Найти наивероятнейшее число нестандартных деталей из 100 отобранных для проверки и вероятность этого события. Найти вероятность того, что стандартных деталей будет от 75 до 90.
4. Вероятность изготовления бракованной детали 0,2. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей из 250, взятых для проверки и вероятность этого события и того, что бракованных деталей будет от 40 до 50.
5. Вероятность изготовления бракованной детали 0,2. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей из 50, взятых для проверки и вероятность этого события и того, что бракованных деталей будет от 4 до 5.
6. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,7. Сделано 100 выстрелов. Найти наивероятнейшее число поражений цели и вероятность этого события.
7. Вероятность того, что саженец ёлки приживется, равна 0,8. Какова вероятность того, что приживется не менее 300 из 400 саженцев?

8. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,7. Сделано 2100 выстрелов. Найти наивероятнейшее число поражений цели и вероятность этого события.
9. Вероятность того, что саженец ёлки приживется, равна 0,9. Какова вероятность того, что приживется не менее 350 из 400 саженцев?
10. Вероятность изготовления стандартной детали 0,8. Найти вероятность того, что среди 250 проверяемых деталей стандартных будет 200, более 200.
11. Вероятность изготовления стандартной детали 0,9. Найти вероятность того, что среди 250 проверяемых деталей стандартных будет 210, более 225.

Задачи с 12 по 15 (в условии задачи N соответствует номеру задачи)

В среднем 90% выпускаемых изделий являются стандартными. Найти вероятность того, что среди отобранных 400 для проверки изделий, стандартных будет: а)350+N; б) от 350 до 360+N.

Задачи с 16 по 20 (в условии задачи N соответствует номеру задачи)

В среднем 10% изготавливаемых деталей являются нестандартными. Найти вероятность того, что нестандартных деталей из 100 отобранных для проверки будет N штук; от 8 до N.

§5. Приближенная формула Пуассона

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{где} \lambda = np.$$

Формулу применяют, когда вероятность успеха крайне мала, т.е. сам по себе успех (появления события А) является редким событием, но количество испытаний n велико ($p < 0{,}1, n \geq 50, \text{или} \lambda = np \leq 10$).

Пример 1:

Крымский завод отправил в Москву 1500 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более четырёх бутылок.

Решение:

Здесь n = 1500, p = 0,0020, k≤4,

$\lambda = n \cdot p = 1500 \cdot 0{,}002 = 3 \leq 10,$

$$P_{1500}(k \leq 4) = P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2) + P_{1500}(3) + P_{1500}(4) \approx$$
$$\approx \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} + \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} + \frac{3^3}{3!} \cdot e^{-3} + \frac{3^4}{4!} \cdot e^{-3} =$$

$= e^{-3} \cdot \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}\right) \approx 0{,}05 \cdot \frac{24+72+108+108+81}{24} = 0{,}05 \cdot \frac{393}{24} \approx 0{,}82.$

Пример 2

Среди семян пшеницы 0,6% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружится ровно 6 семян сорняков?

Решение:

Здесь n = 1000, p = $\frac{0{,}6}{100} = 0{,}006 < 0{,}1, k = 6,$

$\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}006 = 6;$

$P_{1000}(6) = \frac{6^6}{6!} \cdot e^{-6} \approx \frac{46656}{720} \cdot 0{,}00248 \approx 0{,}16.$

Пример 3

Известно, что вероятность выпуска сверла довешанной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладываются в коробке по 500 штук. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных свёрл?

Решение:

Здесь n = 500, p = 0,02, k = 0,

$\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}02 = 10,$

$P_{500}(0) = \frac{10^0}{0!} \cdot e^{-10} = 1 \cdot e^{-10} = e^{-10}$.

Формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

<u>Потоком событий</u> называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (например, поток посетителей в парикмахерской, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов элементов и т.п.)

Вероятность появления k событий простейшего потока за время продолжительностью t определятся формулой Пуассона.

$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-at}$, где $a = np$, где a – интенсивность потока (среднее число событий, появляющихся в единицу времени).

Пример 4

Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность позвонить любому номеру в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Решение:

Здесь n = 2000, p = 0,003, k = 5,

Среднее число позвонивших в течение часа абонентов равно

$a = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}003 = 6,$

$P_1(5) = \frac{(6 \cdot 1)^5}{5!} \cdot e^{-6 \cdot 1} \approx \frac{7776}{120} \cdot 0{,}00248 \approx 0{,}16$.

Пример 5

На диспетчерский пункт в среднем поступает 3 заказа в минуту на такси. Определить вероятность того, что за две минуты поступит не менее 4 вызовов.

Решение:

Здесь $\alpha = 3$, $t = 2,$ k≥4, $\alpha \cdot t = 3 \cdot 2 = 6,$

$$P_2(k \geq 4) = 1 - P(k < 4) = 1 - \left(P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3)\right) =$$

$$1-\left(\frac{6^0}{0!}e^{-6}+\frac{6^1}{1!}e^{-6}+\frac{6^2}{2!}e^{-6}+\frac{6^3}{3!}e^{-6}\right)=1-e^{-6}(1+6+18+36)=$$
$$=1-0{,}00248\cdot 61\approx 0{,}848.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В среднем 5% изготавливаемых деталей являются нестандартными. Найти наивероятнейшее число нестандартных деталей из 100 отобранных для проверки и вероятность этого события.
2. Вероятность поломки изделия при перевозке 0,05. Какова вероятность поломки менее двух изделий при перевозке 200 изделий.
3. Вероятность поломки изделия при перевозке 0,02. Какова вероятность поломки менее двух изделий при перевозке 100 изделий.
4. В среднем в магазин за 1 минуту заходит 2 покупателя. Найти вероятность того, что за 5 минут в магазин зайдет не более четырёх покупателей.
5. В среднем в магазин за 1 минуту заходит 1 покупатель. Найти вероятность того, что за 5 минут в магазин зайдет не более пяти покупателей.
6. Среднее число элементов, выходящих из строя за 1 час равно 2. Какова вероятность, что за 5 часов из строя выйдет менее двух элементов?
7. Среднее число элементов, выходящих из строя за 1 час равно 2. Какова вероятность, что за 2 часа из строя выйдет менее двух элементов?
8. В ателье в среднем за 1 час заходят 2 клиента. Найти вероятность того, что за 5 часов в ателье зайдет менее трёх клиентов
9. В ателье в среднем за 1 час заходит 1 клиент. Найти вероятность того, что за 5 часов в ателье зайдет менее трёх клиентов
10. В среднем в магазин за 1 минуту заходит 1 покупатель. Найти вероятность того, что за 6 минут в магазин зайдет не более пяти покупателей.

Задачи 11-15 (в условии задачи N соответствует номеру задачи)
Вероятность поломки изделия при перевозке 0,01. Найти вероятность поломки менее двух изделий при перевозке 100*N изделий.

Задачи 16-20 (в условии задачи N соответствует номеру задачи)
Прибор состоит из 50 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них за время t равна 0,02. Найти вероятность того, что за это время откажут N-9 элементов.

§6. Дискретные случайные величины (ДСВ)

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.Числовыми характеристиками ДСВ являются:

1. Математическое ожидание ДСВ:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

2. Дисперсия ДСВ по определению:

$$Д(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - M(X)\big)^2 \cdot p_i = \big(x_1 - M(X)\big)^2 \cdot p_1 + \big(x_2 - M(X)\big)^2 \cdot p_2 + \cdots + \big(x_n - M(X)\big)^2 \cdot p_n$$

Дисперсия ДСВ по теореме:

Д(X) = M$(X^2) - M^2(X)$ =

$$Д(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \big(M(X)\big)^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \cdots + x_n^2 \cdot p_n - \big(M(X)\big)^2$$

3. Среднее квадратическое отклонение ДСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{Д(X)}$$

Функция распределения случайной величины

$$F(x) = P(Xx) = \begin{cases} 0, \text{при} \quad x \le x_1, \\ p_1, \text{при } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, \text{при } x_2 < x \le x_3, \\ \ldots, \\ 1, \text{при } x > x_n. \end{cases}$$

Вероятность попадания ДСВ в интервал (а, в): P($а < X < в$) = F(в) – F(а).

Пример

Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти числовые характеристики ДСВ X, P($3 < X < 5$),
P (X4,5), P (X 2,7). Построить график функции распределения.

Решение:

M(X) = $2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 = 0{,}6 + 0{,}4 + 1 + 2{,}4 = 4{,}4$.

Д(X) = (по теореме) = $2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}4 - 4{,}4^2 =$
$= 1{,}2 + 1{,}6 + 5 + 14{,}4 - 19{,}36 = 2{,}84$.

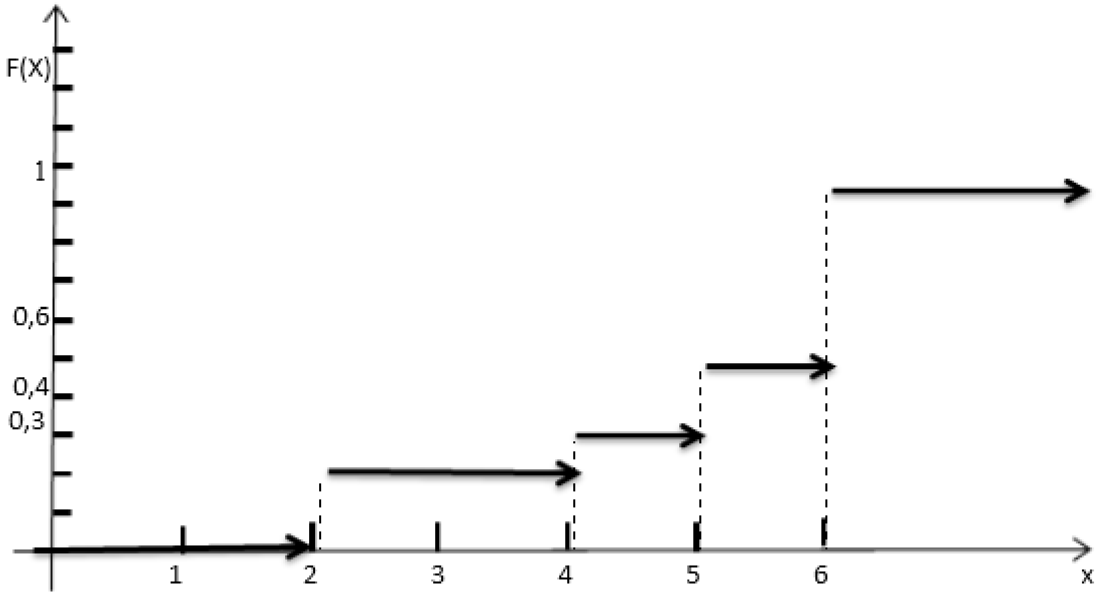
$\sigma(X) = \sqrt{2{,}84 \approx 1{,}685}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 2, \\ 0{,}3, \text{при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}3 + 0{,}1, \text{при } 4 < x \le 5, \\ 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2, \text{при } 5 < x \le 6, \\ 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4, \text{при } x > 6. \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 2, \\ 0{,}3, \text{при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}4, \text{при } 4 < x \le 5, \\ 0{,}6, \text{при } 5 < x \le 6, \\ 1, \text{при } x > 6. \end{cases}$$

$$P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1.$$

$$P(X > 4{,}5) = P(4{,}5 < X < \infty) = F(\infty) - F(4{,}5) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

$$P(X < 2{,}7) = P(-\infty < X < 2{,}7) = F(2{,}7) - F(-\infty) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3.$$



Задачи для самостоятельного решения

1. Найти числовые характеристики случайной величины X и функцию распределения F(x), построить график F(x). Найти P(-1<x<3).

x	-2	0	1	4
p	0,4	0,1	0,3	0,2

2. Найти числовые характеристики случайной величины X и функцию распределения F(x), построить график F(x).Найти P(-1<x<3).

x	-3	0	1	5
p	0,4	0,2	0,3	0,1

3. Найти числовые характеристики случайной величины X, функцию распределения F(x), построить ее график, найти P(0<x<2).

x	-2	-1	1
p	0,5	0,1	0,4

4. Найти числовые характеристики случайной величины X, функцию распределения F(x), построить ее график, найти P(0<x<2).

x	-2	-1	4
p	0,5	0,2	0,3

5. Найти числовые характеристики случайной величины X, функцию распределения F(x), построить ее график, найти P(0<x<2).

x	-4	-1	2
p	0,7	0,2	0,1

6. Найти D(x) дискретной случайно величины X, функцию распределения F(x), построить ее график, найти P(0<x<2).

x	-5	-3	1	4
p	0,4	0,2	0,3	0,1

7. Найти числовые характеристики случайной величины X, построить график F(x), найти P(0<x<2).

x	-3	-1	4
p	0,6	0,2	0,2

8. Найти D(x), построить график F(x) дискретной случайной величины X, найти P(0<x<2).

x	-4	-2	1	4
p	0,3	0,2	0,3	0,2

9. Найти D(x), F(x) дискретной величины, построить ее график, найти P(0<x<2).

x	-2	-1	1	3
p	0,4	0,2	0,1	0,3

10. Найти числовые характеристики случайной величины X, построить график F(x), найти P(0<x<3):

x	-3	1	4
p	0,5	0,2	0,3

11. Найти M(x), F(x) дискретной величины, построить график F(x), найти P(0<x<3):

x	-2	-1	0	2
p	0,4	0,2	0,2	0,2

12. Найти числовые характеристики случайной величины X, построить график F(x), найти P(0<x<2):

x	-3	1	4
p	0,4	0,3	0,3

13. Найти D(x), F(x) случайной величины X, построить ее график, найти P(0<x<2):

x	-2	1	6

p	0,7	0,2	0,1

14. Найти числовые характеристики случайной величины X, построить график F(x), найти P(0<x<2):

x	-1	1	3	5
p	0,4	0,3	0,2	0,1

15. Найти числовые характеристики, F(x) величины X, построить график F(x), найти P(0<x<2):

x	1	3	5
p	0,6	0,3	0,1

16. Найти M(x), P(0<x<2) дискретной величины X, построить график F(x):

x	-1	1	4
p	0,3	0,5	0,2

17. Найти D(x), построить график F(x), найти P(0<x<2):

x	-3	1	5
p	0,7	0,2	0,1

18. Найти числовые характеристики случайной величины X, построить график F(x), найти P(-2<x<2):

x	-1	0	3	4
p	0,3	0,4	0,2	0,1

19. Найти числовые характеристики, построить график F(x), найти P(0<x<2):

x	1	3	6
p	0,5	0,3	0,2

20. Найти M(x), P(1<x<2) дискретной величины X, построить график F(x):

x	-1	1	4
p	0,1	0,5	0,4

§7. Закон распределения дискретных случайных величин

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения задается в виде таблицы, в первой строке содержатся возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пусть в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p. Тогда случайная величина X, означающая число появлений события A в n независимых испытаниях, может принимать значения 0,1,2,…,n с вероятностями $\mathrm{P}_n(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. Такое распределение случайной величины X называется *биномиальным*.

Пример 1:

Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,1. Записать закон распределения числа отказавших элементов устройства.

Решение:

Дискретная случайная величина X может принимать значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ (все элементы работают, один отказал, два отказали, отказали все три элемента). Так как n = 3, p = 0,1, q = 0,9, то по формуле Бернулли находим:

$$\mathrm{P}_3(0) = q^3 = 0{,}729; \mathrm{P}_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}343;$$

$$\mathrm{P}_3(2) = \mathrm{C}_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027; \mathrm{P}_3(3) = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Искомый биномиальный закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,343	0,027	0,001

Пример 2:

В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение:

Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найдем вероятности возможных значений X по формуле

$$P(X = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

(N – число деталей в партии, n – число стандартных деталей в партии, m – число отобранных деталей, k – число стандартных деталей среди отобранных), находим:

$P(X=0)=\frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{10 \cdot 9/(1 \cdot 2)}=\frac{1}{45};$

$P(X=1)=\frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8 \cdot 2}{45}=\frac{16}{45};$

$P(X=2)=\frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{8 \cdot 7/(1 \cdot 2)}{45}=\frac{28}{45}.$

Контроль: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке 10 шаров, из них 6 красных. Наугад извлекают 2 шара. Составить закон распределения случайной величины X – числа появления красного шара.
2. В коробке 15 шаров, из них 10 красных. Наугад извлекают 2 шара. Составить закон распределения случайной величины X – числа появлений красного шара.
3. Вероятность решения 1-ой задачи 0,7, а 2-ой – 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа решенных задач из двух предложенных для решения.
4. Вероятность решения 1-ой задачи 0,6, а 2-ой – 0,7. Составить закон распределения случайной величины X – числа решенных задач из двух предложенных для решения.
5. Составить закон распределения случайной величины X – числа появлений герба при 4-х подбрасываниях монеты. Найти M(x), D(x).
6. В коробке 10 изделий, из них 7 зеленого цвета. Наугад извлекают 2 изделия. Составить закон распределения X - числа изделий зеленого цвета, построить график F(x).
7. Составить закон распределения случайной величины X – числа появлений герба при 3-х подбрасываниях монеты. Найти M(x), D(x).
8. В коробке 10 изделий, из них 6 зеленого цвета. Наугад извлекают 2 изделия. Составить закон распределения X - числа изделий зеленого цвета, построить график F(x).
9. Составить закон распределения X - числа решенных задач из трех предложенных для решения, если вероятность решения каждой задачи равна 0,7.

10. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,7. Составить закон распределения X - числа нестандартных деталей из двух проверяемых. Найти M(x).
11. Составить закон распределения X - числа решенных задач из трех предложенных для решения, если вероятность решения каждой задачи равна 0,6.
12. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,8. Составить закон распределения X - числа нестандартных деталей из двух проверяемых. Найти M(x).
13. Найти закон распределения X - числа поражений цели при 3-х выстрелах, если вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,7.
14. Составить закон распределения X - числа неисправных ламп из пяти проверяемых, если вероятность того, что лампа неисправна равна 0,4.
15. Вероятность появления события A равна 0,8. Составьте закон распределения X - числа появлений события A в двух испытаниях.
16. В коробке 12 шаров, из них 5 розовых. Извлекают 2 шара. Составьте закон распределения X - числа появлений розовых шаров.
17. Найти закон распределения X - числа поражений цели при 4-х выстрелах, если вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,6.
18. Составить закон распределения X - числа неисправных ламп из 7 проверяемых, если вероятность того, что лампа неисправна равна 0,3.
19. Вероятность появления события A равна 0,3. Составьте закон распределения X - числа появлений события A в двух испытаниях.
20. В коробке 9 шаров, из них 3 розовых. Извлекают 2 шара. Составьте закон распределения X - числа появлений розовых шаров.

§ 8. Непрерывные случайные величины (НСВ)

Непрерывной называют случайную величину, принимающую несчётное множество возможных значений из некоторого промежутка.

Плотностью распределения вероятностей НСВ называют первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Числовыми характеристиками НСВ являются:

1. Математическое ожидание НСВ

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (а, в), то

$M(X) = \int_{\text{а}}^{\text{в}} x \cdot f(x)dx.$

2. Дисперсия НСВ по определению

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx.$

Или равносильным равенством по теореме

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2.$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (а; в), то

$$D(X) = \int_{а}^{в} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx = \int_{а}^{в} x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2$$

3. <u>Среднее квадратическое отклонение</u> НСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (а; в), определяется равенством

$$P(a < X < в) = \int_{а}^{в} f(x)dx.$$

Пример:

Дана функция распределения НСВ X:

$$F = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{2}, \text{при } 0 < x \le \sqrt{2}, \\ 1, \text{при } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Найти:

1) числовые характеристики НСВ;

2) P($0 < X < 1$);

3) $P(|X - M(X)|) < \frac{\sqrt{2}}{3}$;

4) Построить график интегральной и дифференциальной функций

Решение:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{2}, \text{при } 0 < x \le \sqrt{2}, \\ 1, \text{при } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

1. $M(X) = \int_{а}^{в} x \cdot f(x)dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot xdx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$$D(X) = \int_{а}^{в} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot xdx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}x + \frac{8}{9}\right) \cdot xdx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(x^3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right)dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^3 dx - \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx + \frac{8}{9}\int_0^{\sqrt{2}} xdx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} -$$

$$\frac{-4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{8}{9} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^4}{4} - \frac{0^4}{4} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(\sqrt{2})^3}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{0^3}{3} + \frac{8}{9} \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{2} -$$

$- \frac{-8}{9} \cdot \frac{0^2}{2} = 1 - \frac{16}{9} + \frac{8}{9} = \frac{9-16+8}{9} = \frac{1}{9}$.

Или

$D(X) = \int_{а}^{в} x^2 \cdot f(x) - [M(X)]^2 = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot xdx - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \int_0^{\sqrt{2}} x^3 dx - \frac{8}{9} = \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{8}{9} = \frac{(\sqrt{2})^4}{4} - \frac{0^4}{4} - \frac{8}{9} =$
$= 1 - \frac{8}{9} = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9}$.

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

2. $P(0 < X < 1) = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$

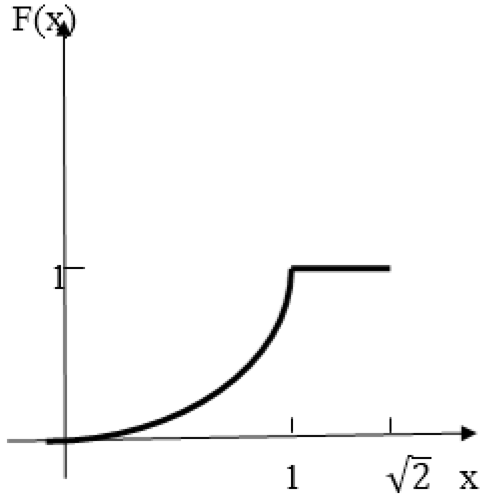
3. $\left|X - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right| < \frac{\sqrt{2}}{3}$,

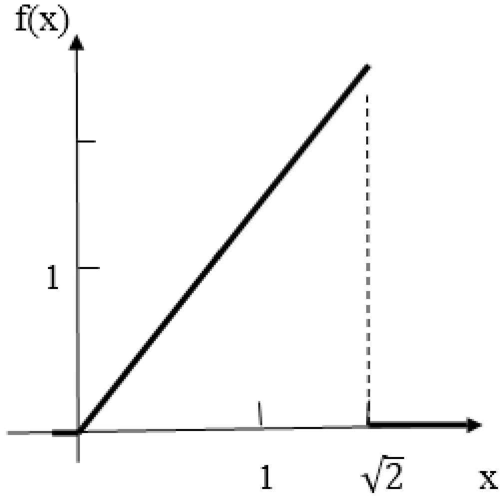
$\frac{-\sqrt{2}}{3} < X - \frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3}$,
$\frac{-\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} < X < \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\frac{\sqrt{2}}{3} < X < \frac{3\sqrt{2}}{3}$,
$\frac{\sqrt{2}}{3} < X < \sqrt{2}$.

$$P\left(|X - M(X)| < \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{3} < X < \sqrt{2}\right) =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\sqrt{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4.





Задачи для самостоятельного решения

Дана функция распределения случайной величины. Найти:
1) числовые характеристики;
2) $P(а < X < в)$;
3) построить графики интегральной и дифференциальной функций

В – 1

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \frac{x^2}{100}, 0 < x \le 10, \\ 1, x > 10. \end{cases}$$ а = 1, в = 5.

В – 2

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \frac{x^2}{25}, 0 < x \le 5, \\ 1, x > 5. \end{cases}$$ а = 4, в = 6.

В – 3

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 2, \\ 0{,}5(2x - 4), 2 < x \le 3, \\ 1, x > 3. \end{cases}$$ а = 2,7, в = 3.

В – 5

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{x^2}{4}, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$ а = -2, в = 3.

В – 6

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 3,\\ \frac{x-3}{4}, 3<x\le 7,\\ 1, x>7.\end{cases}$$ а = 4, в = 6.

В – 7

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 4,\\ \frac{x-4}{2}, 4<x\le 6,\\ 1, x>6.\end{cases}$$ а = 4, в = 5.

В – 8

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{x^2}{9}, 0<x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$$ а = -1, в = 2.

В – 9

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{x^2}{16}, 0<x\le 4,\\ 1, x>4.\end{cases}$$ а = 1, в = 3.

В – 10

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{x}{4}, 0<x\le 4,\\ 1, x>4.\end{cases}$$ а = 2, в = 5.

В – 11

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{x^3}{8}, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$ а = 0, в = 1.

В – 12

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{2x^2}{8}, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$ а = 2, в = 3.

В – 13

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 7,\\ \frac{x-7}{2}, 7<x\le 9,\\ 1, x>9.\end{cases}$$ а = 2, в = 7.

В – 14

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0{,}5,\\ \frac{2x-1}{3}, 0{,}5<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$ а = 1, в = 1,5.

В – 15

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1,\\ \frac{x^2-1}{7}, 1<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$ а = $\frac{1}{2}$, в = $\frac{3}{2}$.

В – 16

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le\sqrt{2},\\ \frac{x^2-2}{2}, \sqrt{2}<x\le 2\\ 1, x>2.\end{cases}, \text{ а} = 1, \text{ в} = 2.$$

В – 17

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 3x-3, 0<x\le\frac{4}{3},\\ 1, x>\frac{4}{3}.\end{cases} \text{ а} = 1, \text{ в} = 2.$$

В – 18

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 5x+4, 0<x\le 0{,}6,\\ 1, x>0{,}6.\end{cases} \text{ а} = 0{,}7, \text{ в} = 0.$$

В – 19

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 5,\\ \frac{x-5}{2}, 5<x\le 7,\\ 1, x>7.\end{cases} \text{ а} = 6, \text{ в} = 9.$$

В – 20

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le\sqrt{2},\\ \frac{x^2-2}{14}, \sqrt{2}<x\le 4,\\ 1, x>4.\end{cases} \text{ а} = \frac{3}{2}, \text{ в} = 3.$$

§9. Важнейшие непрерывные распределения

1. Нормальный закон распределения

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot l^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X.

Функция распределения имеет вид

$F(x)=0{,}5+0{,}5\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x l^{-(z^2/2)}dz$ - нечётная функция Лапласа.

Табличное значение функции в приложение 2 для положительных значений $x(0\le x\le 5)$; для значений $x>5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечётная $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α;β), равна $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ,

$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Пример 1

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14)

Решение:

Здесь a = 10; $\sigma = 2$; $\alpha = 12$; $\beta = 14$,

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) =$$

$= 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359$.

Пример 2

Затаривание мешков с сахаром производится без систематических ошибок. Случайные ошибки подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 200г. Найти вероятность того, что затаривание будет проведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 100г.

Решение:

Здесь $\sigma = 200, \delta = 100$,

$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

$P(|X - a| < 100) = 2\Phi\left(\frac{100}{200}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383$.

2. Показательный закон распределения

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где λ - постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал (α, β) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda в}$.

Числовые характеристики случайной величины

$M(X) = \frac{1}{\lambda}$ - математическое ожидание;

$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ – дисперсия;

$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$ – среднее квадратическое отклонение.

Пример 3

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$;

при$x < 0 f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,13; 0,7).

Решение:

Здесь α = 0,13, β =0,7.

Так как $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, при$x \geq 0$, а по условию $f(x) = 3e^{-3x}$, следовательно $\lambda = 3$.

$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

$$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-3\cdot 0{,}13} - e^{-3\cdot 0{,}7} = e^{-0{,}39} - e^{-2{,}1} =$$

$$= 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555.$$

Пример 4

Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если известно, что математическое ожидание равно $\frac{1}{5}$.

Решение:

По условию $M(x) = \frac{1}{5} = \frac{1}{\lambda}$, следовательно, $\lambda = 5$.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ 5e^{-5x}, \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-5x}, \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X распределена по показательному закону, M(x)=1/2. Найти P(1<x<4).
2. Случайная величина X распределена по показательному закону, M(x)=1/3. Найти P(1<x<4).
3. Величина X распределена по нормальному закону, M(x)=15, D(x). Найти вероятность того, что при данном испытании значение X отклонится от M(x) не более, чем на 0,5.
4. Случайная величина X распределена по нормальному закону, M(x)=20. D(x)=25. Найти P(19<x<21).
5. Случайная величина X распределена по показательному закону, M(x)=1/4. Найти P(2<x<4).
6. Случайна величина X распределена по нормальному закону с параметрами a=2, $\sigma = 4$ найти P(0<x<6).
7. Случайна величина X распределена по нормальному закону с параметрами a=3, $\sigma = 2$ найти P(2<x<7).
8. Случайна величина X распределена по нормальному закону с параметрами a=2, $\sigma = 2$ найти вероятность того, что значения X отклоняются от нее не более, чем на 0,6.

9. Случайна величина X распределена по нормальному закону с параметрами a=1, $\sigma = 0{,}3$ найти вероятность того, что значения X отклоняются от нее не более, чем на 0,6.
10. Случайная величина X распределена по нормальному закону, M(x)=2, D(x)=4. Найти P(1<x<4).
11. Случайная величина X распределена по нормальному закону, M(x)=4, D(x)=4. Найти P(1<x<5).
12. Случайная величина X распределена по нормальному закону, M(x)=10, D(x)=4. Найти вероятность того, что X примет значение из (9,12).
13. Величина X распределена по нормальному закону, M(x)=11 не более, чем на 0,7.
14. Случайная величина X распределена по нормальному закону, M(x)=12. D(x)=16. Найти вероятность того, что X примет значение из (11,12).
15. Случайная величина X распределена по нормальному закону, M(x)=22. D(x)=16. Найти P(18<x<21).
16. Величина X задана по нормальному закону, M(x)=14. D(x)=25. Найти P(11<x<15).
17. Найти вероятность того, что нормально распределенная величина X в данном испытании отклонится от M(x) не более чем на 0,8, если D(x)=4.
18. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина X примет значение из (11,14), если M(x)=12, D(x)=16.
19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами M(x)=15. D(x)=25. Найти P(14<x<18).
20. Найти вероятность того, что нормально распределенная величина X в данном испытании отклонится от M(x) не более, чем на 1, если D(x)=4.

Вопросы к экзамену по теории вероятностей

1. Предмет теории вероятностей.
2. Элементы комбинаторики. Схема выбора без повторений.
3. Элементы комбинаторики. Схема выбора с повторениями.
4. Классификация событий.
5. Алгебра событий.
6. Понятие случайного события. Относительные частоты.
7. Классическое и геометрическое определения вероятности.
8. Теорема умножения вероятностей.
9. Теорема сложения вероятностей.
10. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
11. Формула полной вероятности.
12. Формула Байеса.
13. Повторные независимые испытания. Схема Бернулли.
14. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

15. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
16. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.
17. Случайные величины. Виды случайных величин.
18. Закон распределения случайной величины. Способы задания закона распределения.
19. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Функция распределения.
20. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
21. Плотность распределения. Свойства плотности распределения.
22. Непрерывные случайные величины.
23. Функция распределения.
24. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
25. Основные законы распределения дискретных случайных величин.
26. Основные законы распределения непрерывных случайных величин.
27. Нормальное распределение, его свойства.
28. Равномерное распределение.
29. Показательное распределение.
30. Правило «трех сигм».
31. Функция одного случайного аргумента.
32. Функция двух случайных аргументов.
33. Системы двух случайных величин.
34. Введение в статистику. Выборка. Способы отбора.
35. Эмпирическая функция распределения.
36. Графическое изображение статистического распределения.
37. Числовые характеристики выборки.
38. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки.
39. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания.
40. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения.
41. Проверка статистических гипотез.
42. Критерий согласия Пирсона.

Практикум по теории вероятностей

Задания

1. В партии из N изделий *n* изделий имеют скрытый дефект (табл. 1). Какова вероятность того, что из взятых наугад *m* изделий *k* изделий являются дефектными?

2. В магазине выставлены для продажи n изделий, среди которых k изделий некачественные (табл. 2). Какова вероятность того, что взятые случайным образом m изделий будут некачественными?

3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n_1 с первого завода, n_2 со второго, n_3 с третьего (табл. 3). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1, на втором p_2, на третьем p_3. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

4. Дано распределение дискретной случайной величины X (табл. 4). Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

5. В городе имеются N оптовых баз (табл. 5). Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах одинакова и равна p. Составить закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент.

6. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно M_x, среднее квадратическное отклонение равно σ_x (табл. 6). Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $(a,\ b)$.

Т а б л и ц а 1. Варианты задания 1

Вариант	*N*	*n*	*m*	*k*	Вариант	*N*	*n*	*m*	*k*
1	20	4	5	2	16	20	5	4	1
2	30	5	5	3	17	16	6	5	3
3	20	5	4	2	18	18	5	4	2
4	25	6	5	3	19	14	4	3	1
5	15	4	3	2	20	10	4	3	2
6	20	6	4	1	21	16	5	3	2
7	30	4	3	2	22	20	6	4	3
8	16	4	3	2	23	26	5	4	2
9	18	6	5	3	24	32	8	5	3
10	12	5	4	2	25	34	10	6	4
11	30	10	5	3	26	30	6	5	3
12	26	8	6	4	27	25	5	3	2
13	24	8	5	3	28	24	6	4	3
14	22	6	4	2	29	28	8	5	2
15	20	5	3	2	30	24	6	3	2

Таблица 2. Варианты задания 2

Вариант	n	k	m	Вариант	n	k	m
1	20	6	2	16	15	5	2
2	18	8	3	17	17	6	3
3	16	6	2	18	18	8	4
4	14	5	3	19	20	7	2
5	**12**	**4**	**3**	**20**	**22**	**6**	**3**
6	**10**	**4**	**2**	**21**	**26**	**8**	**2**
7	**18**	**6**	**3**	**22**	**28**	**7**	**3**
8	**22**	**3**	**2**	**23**	**30**	**10**	**2**
9	**24**	**10**	**3**	**24**	**26**	**6**	**2**
10	**26**	**6**	**2**	**25**	**28**	**10**	**3**
11	**30**	**8**	**3**	**26**	**14**	**5**	**2**
12	**25**	**7**	**2**	**27**	**18**	**5**	**3**
13	**23**	**6**	**3**	**28**	**16**	**4**	**2**
14	**24**	**8 .**	**2**	**29**	**17**	**3**	**2**
15	**30**	**9**	**3**	**30**	**19**	**6**	**3**

Таблица 3. Варианты задания 3

Вариант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3	Вариант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7	16	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7	17	15	0,8	25	0,7	20	0,9
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9	18	40	0,9	25	0,8	35	0,8
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8	19	14	0,8	26	0,6	20	0,7
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6	20	18	0,9	32	0,8	30	0,7
6	40	0,8	30	0,8	30	0,9	21	30	0,9	20	0,7	10	0,8
7	20	0,8	50	0,9	30	0,8	22	16	0,9	24	0,8	60	0,9
8	35	0,7	35	0,8	30	0,9	23	30	0,9	10	0,7	10	0,7
9	15	0,9	45	0,8	40	0,9	24	15	0,8	35	0,9	50	0,8
10	40	0,8	15	0,7	45	0,8	25	40	0,8	20	0,8	40	0,9
11	20	0,9	15	0,9	15	0,8	26	10	0,9	20	0,8	10	0,6
12	14	0,8	26	0,9	10	0,8	27	35	0,8	25	0,7	50	0,8
13	16	0,8	40	0,9	44	0,7	28	40	0,8	20	0,9	40	0,8
14	30	0,9	20	0,7	50	0,7	29	30	0,9	40	0,8	30	0,9
15	20	0,8	10	0,9	20	0,9	30	10	0,7	20	0,9	20	0,7

Таблица 4. Варианты задания 4

Вариант	Числовые данные					Вариант	Числовые данные				
1	x_i	-5	2	3	4	16	x_i	4	6	9	
	p_i	0,4	0,3	0,1	0,2		p_i	0,4	0,3	0,3	
2	x_i	0,2	0,5	0,6	0,8	17	x_i	4	6	8	9
	p_i	0,1	0,5	0,2	0,2		p_i	0,3	0,1	0,1	0,5
3	x_i	-6	-2	1	4	18	x_i	3	6	7	9
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,3	0,2	0,1	0,4
4	x_i	0,2	0,5	0,6		19	x_i	5	10	12	14
	p_i	0,5	0,4	0,1			p_i	0,4	0,2	0,1	0,3
5	x_i	-8	-2	1	3	20	x_i	6	8	14	
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,2	0,4	0,4	
6	x_i	-2	1	3	5	21	x_i	1	3	4	5
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,4	0,3	0,1	0,2
7	x_i	-3	2	3	5	22	x_i	4	5	7	8
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2		p_i	0,1	0,5	0,2	0,2
8	x_i	2	3	10		23	x_i	2	4	5	6
	p_i	0,1	0,4	0,5			p_i	0,3	0,1	0,4	0,2
9	x_i	-4	-1	2	3	24	x_i	2	4	8	
	p_i	0,3	0,1	0,4	0,2		p_i	0,1	0,4	0,5	
10	x_i	-3	2	3	5	25	x_i	-3	-1	3	5
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2		p_i	0,4	0,3	0,1	0,2
11	x_i	-6	-2	2	3	26	x_i	2	4	6	9
	p_i	0,2	0,4	0,1	0,3		p_i	0,1	0,3	0,3	0,3
12	x_i	2	5	6		27	x_i	2	4	5	6
	p_i	0,5	0,1	0,4			p_i	0,5	0,1	0,3	0,1
13	x_i	-5	-3	1	3	28	x_i	1	3	8	
	p_i	0,2	0,1	0,1	0,6		p_i	0,2	0,1	0,7	
14	x_i	2	5	6	8	29	x_i	4	6	8	10
	p_i	0,2	0,2	0,4	0,2		p_i	0,3	0,2	0,4	0,1
15	x_i	4	6	8	12	30	x_i	6	8	12	16
	p_i	0,3	0,1	0,3	0,3		p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Таблица 5. Варианты задания 5

Вариант	N	P	Вариант	N	P
1	3	0,2	16	4	0,15
2	4	0,25	17	3	0,24
3	3	0,1	18	2	0,1
4	2	0,2	19	3	0,12
5	4	0,1	20	4	0,14
6	3	0,2	21	4	0,16
7	4	0,3	22	3	0,15
8	3	0,1	23	3	0,13
9	3	0,12	24	2	0,21
10	4	0,3	25	2	0,16
11	3	0,15	26	3	0,19
12	3	0,18	27	4	0,26
13	4	0,24	28	3	0,14
14	2	0,14	29	2	0,15
15	3	0,16	30	3	0,22

Таблица 6. Варианты задания 6

Вариант	M_x	σ_x	*а*	*в*	Вариант	M_x	σ_x	*а*	*в*
1	10	1	8	14	16	40	4	36	43
2	12	2	8	14	17	38	2	35	40
3	14	3	10	15	18	42	4	40	43
4	16	2	15	18	19	44	5	41	45
5	18	1	16	21	20	45	5	43	48
6	20	2	17	22	21	46	4	44	48
7	24	1	20	26	22	48	5	45	49
8	26	3	23	27	23	50	6	48	53
9	28	2	24	30	24	52	4	50	55
10	30	1	27	32	25	54	3	53	56
11	32	3	30	35	26	56	4	55	58
12	34	1	30	36	27	58	5	56	61
13	36	2	34	37	28	60	6	58	63
14	38	3	37	41	29	62	5	59	64
15	40	2	39	42	30	64	6	60	66

Приложение 1

Значения* функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3980	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Приложение 2

Значення функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Целые и десятичные доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Список рекомендуемой литературы:

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для бакалавров.- 11-е изд., перераб. и доп.- М.:Юрайт, 2013.- 479 с.- Бакалавр. Базовый курс)

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров .- 12-е изд., перераб. .- М.:Юрайт, 2013.- 479 с.- Бакалавр. Базовый курс)
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. - М. : Айрис-пресс, 2008. - 288 с.