Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Миассе
Кафедра «Технология производства машин»

532(075.8)
З-475

В.Г. Зезин

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР.
РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Учебное пособие

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2021

УДК 532(075.8)
З-475

Одобрено
учебно-методической комиссией филиала в г. Миассе

Рецензенты:
проф., д.т.н. Г.Ф. Костин, к.т.н. Н.Н. Елюкин

Зезин, В.Г.
З-475 Гидравлический удар. Расчет гидродинамических параметров: учебное пособие / В.Г. Зезин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2021. – 50 с.

Учебное пособие предназначено для бакалавров, обучающихся по профилю подготовки «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика», а также может быть использовано студентами других технических специальностей, для которых техническая гидромеханика является профилирующей дисциплиной.

В учебном пособии кратко изложены теоретические основы нестационарных волновых процессов в газонасыщенных сжимаемых жидкостях при гидравлическом ударе. Дается методика расчета гидродинамических параметров в системе при гидравлическом ударе. Приведен пример расчета гидродинамических параметров при прямом и непрямом гидравлическом ударе в приближении идеальной жидкости.

З-475

ВВЕДЕНИЕ

Гидравлический удар – это резкое повышение или понижение давления в гидросистеме при волновых процессах. Данное явление обусловлено инерционностью и упругостью жидкости. Оно всегда сопровождает волновые процессы, являясь их свойством. Изменение давления в каждом отдельном случае может быть большим и малым и, соответственно, удар сильным и слабым.

Умение идентифицировать и анализировать такие процессы является важной составляющей навыков студентов, обучающихся по профилю подготовки «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика».

От умения рассчитать параметры гидравлического удара зависит возможность обеспечения работоспособности гидросистемы. Гидравлические системы, наиболее часто встречающиеся в технических приложениях, имеют протяженные гидролинии, течение в которых можно считать одномерным. В связи с этим излагаемые в пособии теоретические положения и практические расчетные указания соответствуют одномерным течениям.

В первом разделе пособия приведены общие сведения о гидравлическом ударе, описаны внешние проявления гидроудара и его возможные последствия. Описана качественная физическая картина гидродинамических процессов при гидравлическом ударе, приведены основные термины и определения, используемые при рассмотрении этого явления, отмечены заслуги российских ученых в исследовании нестационарных гидродинамических процессов при гидравлическом ударе.

Во втором разделе приведены сведения о характеристиках сжимаемости жидкости – модуле упругости, скорости распространения волн сжатия-расширения и скорости звука. Введено понятие приведенного модуля упругости, учитывающего газонасыщенность жидкости и упругости стенок трубопровода. Показано, что на величину приведенного модуля упругости оказывает влияние давление жидкости, содержание нерастворенного газа в ней и относительная толщина стенок трубопровода.

В третьем разделе приведен пример решения задачи о гидравлическом ударе путем численного интегрирования уравнений сохранения массы и количества движения вязкой жидкости. Задача решена для простого горизонтального трубопровода, состыкованного с большим резервуаром и имеющего перекрывающийся клапан, расположенный в конце трубопровода. Продемонстрировано, каким образом осуществляется математическая постановка задачи, разработка разностной схемы, постановка начальных и граничных условий. Отражены вопросы устойчивости численного решения и его точности (порядок аппроксимации разностной схемы, влияние схемной вязкости).

В четвертом разделе рассмотрен гидравлический удар в идеальной, то есть сжимаемой невязкой жидкости. Показано, что уравнения гидродинамики в этом случае сводятся к волновым уравнениям, имеющим аналитическое решение. Получены выражения для волновых функций, позволяющих рассчитать величину давления и скорости течения в любом сечении трубопровода в зависимости от времени. При этом перекрытие клапана происходит не мгновенно, а за конечный интервал времени. Введено понятие прямого и непрямого гидравлического удара. Получены формулы, позволяющие рассчитать максимальное давление в районе клапана при прямом и непрямом ударе, также распределение давления и скорости потока по длине трубопровода в любой момент времени.

В пятом разделе приведен пример расчета параметров гидравлического удара с использованием зависимостей, полученных в четвертом разделе.

СОКРАЩЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Условные обозначения в формулах

β – объемная доля;
γ – коэффициент (изотермический) сжатия среды;
δ – приращение параметра толщина;
λ – гидравлический коэффициент трения;
Δ – приращение параметра;
μ – коэффициент динамической вязкости;
ν – коэффициент кинематической вязкости;
ρ – плотность;
σ – напряжение;
τ – напряжение трения, шаг гидродинамической разностной сетки по времени;
a – скорость распространения ударной волны;
a_0 – скорость звука;
c – скорость распространения ударной волны;
d, d – диаметр трубопровода, оператор дифференцирования;
D – диаметр;
E – модуль упругости, сила;
F – волновая функция;
G – волновая функция;
h – шаг разностной сетки по координате;
L – длина;
l – длина;
m – масса;
P – давление при разностной аппроксимации;
p – давление;
r – радиус;
S – площадь сечения канала;
s – площадь сечения;
t – время;
w – скорость, осредненная по сечению потока;
V – объем;
W – объем; скорость потока при разностной аппроксимации;
v – скорость;
x – продольная координата;
Y, Z – инварианты Римана;

Числа подобия

Ku – число Куранта;
Re – число Рейнольдса

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

1.1. Внешние признаки и последствия гидравлического удара

Гидравлическим ударом называется особый вид неустановившегося движения жидкости в трубопроводе, который характеризуется интенсивными колебаниями давления и скорости жидкости в гидросистеме. Амплитуда колебаний давления при этом может многократно превышать рабочие давления. Гидравлический удар может возникать как в движущейся жидкости, так и в покоящейся. Причиной возникновения колебательного процесса является внешние воздействия на жидкость, приводящие к резкому изменению ее скорости. Это может быть, например, быстрое закрытие или открытие задвижки в трубопроводной сети, внезапная остановка насоса или его включение при открытом затворе на нагнетательной линии, срабатывание элементов гидроаппаратуры в гидроприводах и т. п. Аналогичные возмущения возникают и в момент взаимодействия жидкости, имеющей газовые включения (например, воздушные пузыри) или кавитационные полости с местными сопротивлениями, например, не полностью открытым клапаном.

Пример изменения давления в системе гидропривода в процессе регулирования показан на рис. 1 [1]. Видно, что возмущения давления, вызванные срабатыванием распределителя, могут существенно превышать рабочее давление.

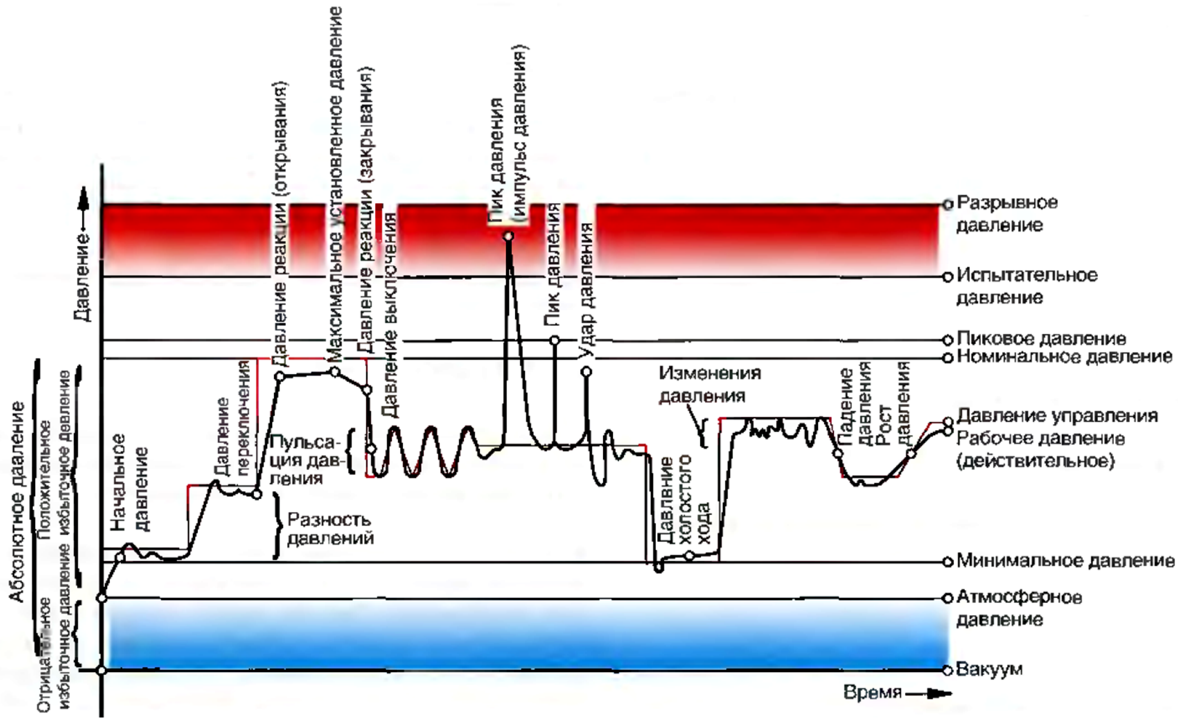


Рис. 1. Пример осциллограммы давления в трубопроводе гидропривода

На рис. 2 приведен пример изменения давления в трубопроводах системы теплоснабжения при внезапной остановке сетевого насоса, зафиксированного стандартной системой учета [2].

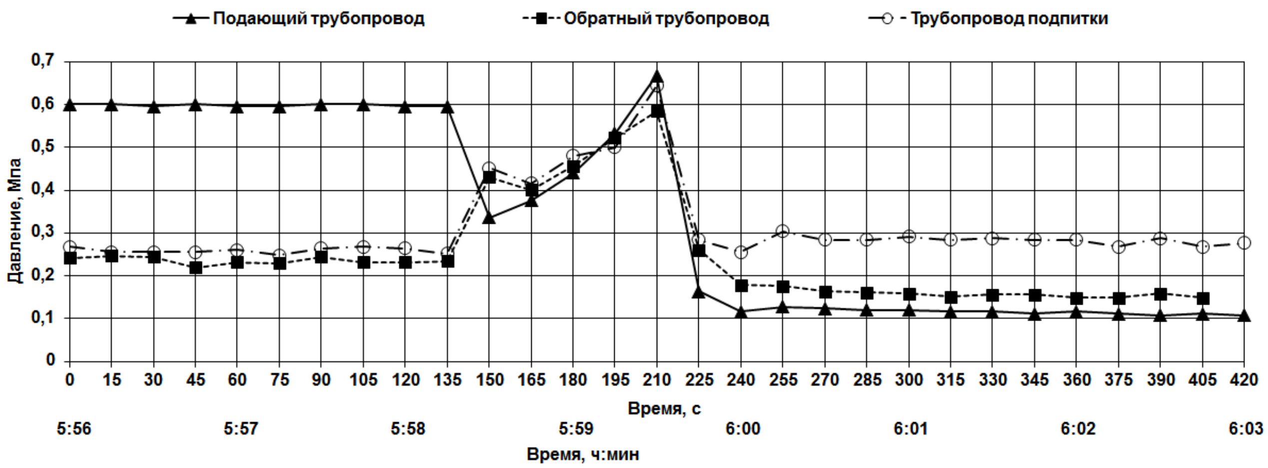


Рис. 2. Данные замеров давлений теплоносителя в подающем и обратном трубопроводах, а также в трубопроводе подпитки измерительным комплексом КТС «Энергия»

Инерционность средств измерения приборов учета и дискретность регистрации измерительного сигнала не позволяет в данном случае отобразить волновой процесс. Фактическая картина изменения давления в системе, которая получена расчетным путем, показана на рис. 3.

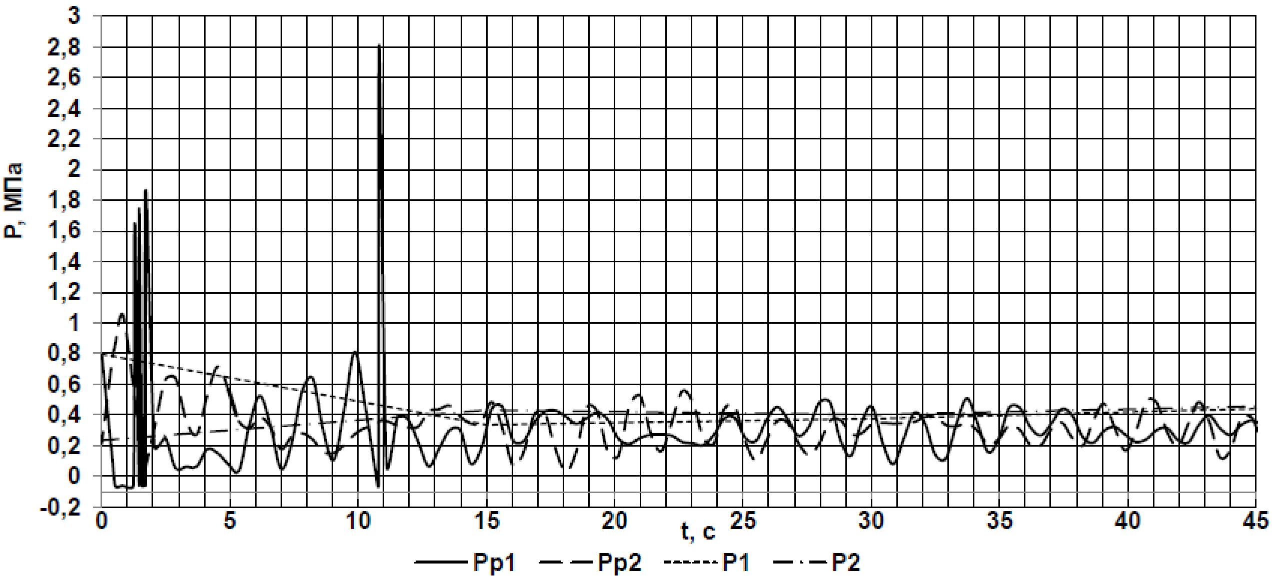


Рис. 3. Расчетные давления в трубопроводах при остановке сетевого насоса:
Pp1 – подающий трубопровод; Pp2 – обратный трубопровод.
P1, P2 – давления замеренные приборами учета

Видно, что максимальное давление при гидравлическом ударе выше примерно в 3,5 раза, чем рабочее давление в системе.

Гидравлический удар может возникать не только в жидкости, находящейся в каналах, но и в гидросистемах со свободной поверхностью. На рис. 3, *а* показано ударное взаимодействие океанской волны с береговой зоной, на рис. 3, *а* – картина движения жидкости при падении в покоящуюся среду твердого тела.

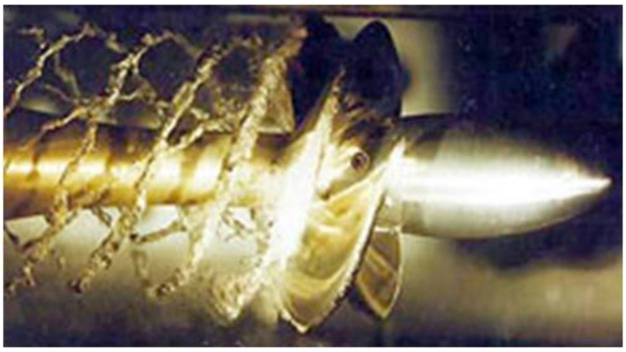
а) *б*)

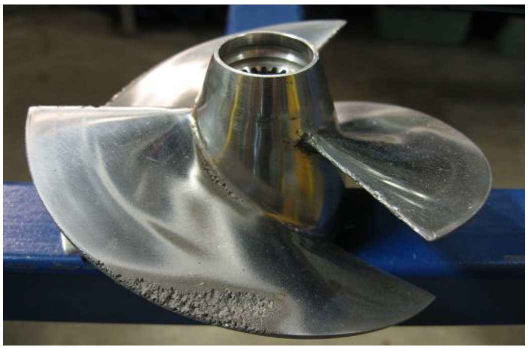
Рис. 4. Примеры картины гидроудара в жидкости со свободной поверхностью

Резкое повышение давления при гидравлическом ударе может вызвать непоправимый вред для конструктивных элементов гидравлических систем. Гидроудар способен приводить к образованию продольных трещин в трубопроводах, что приводит к их разрушению, вызывать разгерметизацию стыков, а также чрезвычайно опасен для насосного оборудования, сосудов, работающих под давлением, теплообменников и пр., рис. 5.

Рис. 5. Последствия гидравлического удара в трубопроводных системах

Необходимо отметить также проявление последствий гидроударов в кавитационных течениях. Возникающие в зонах разрежения кавитационные паровые пузырьки и каверны, попадая в места повышения давления на обтекаемых поверхностях, схлопываются вследствие быстрой конденсации паров с образованием микро гидроударов. Это приводит к эрозионному износу обтекаемых поверхностей, рис. 6.





а) *б*)

Рис. 6. Кавитация на гребном винте: *а* – кавитационные пузырьки;
б – кавитационный износ винта (последствия микро гидроударов)

1.2. Физическая картина процессов при гидравлическом ударе

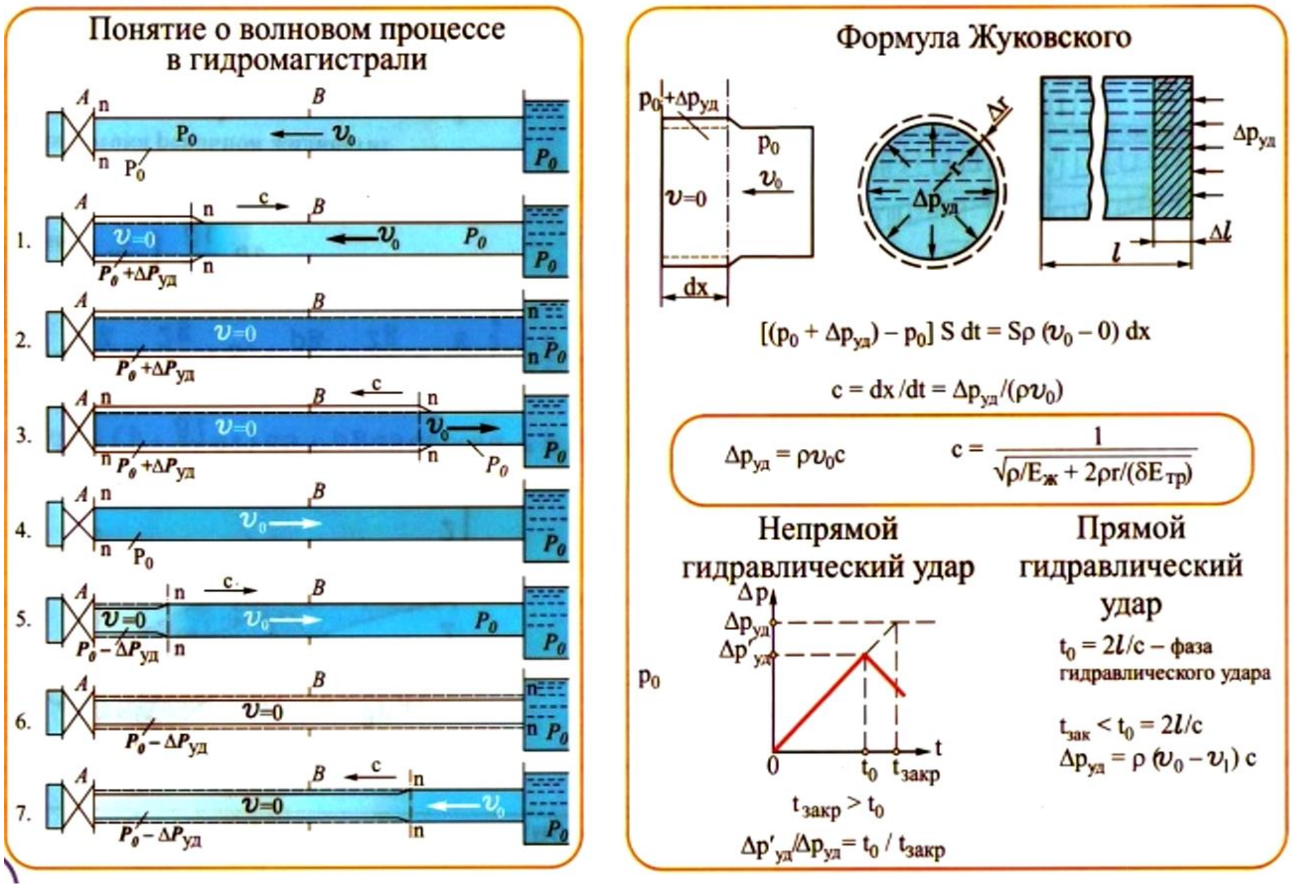
Наблюдающаяся при гидроударе закономерность повышения (понижения) давления, обусловленная торможением (разгоном) потока, следует из уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости, которое для горизонтально расположенного трубопровода постоянного диаметра и пренебрежении потрями давления на трение имеет вид

$$p_1 = p_2 + \Delta p_{\mu} + \rho L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.1)$$

Действительно, для выполнения равенства (1.1), например, при торможении, то есть при отрицательной производной скорости, требуется рост давления p_1. Однако, из этого же уравнения следует, что при бесконечно быстром торможении, то есть $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t \to -\infty$, давление p_1 должно стремиться к бесконечности. Эксперименты же показывают, что при гидроударе колебания давления всегда ограничены по амплитуде. Кроме того, как показывают эксперименты, возникнув в месте возмущения потока, приращение давления переносится с постоянной скоростью вверх и вниз по ходу течения. Это свидетельствует о том, что модель несжимаемой жидкости для расчета процессов гидроудара неприменима, так как несжимаемая жидкость передает возмущения давления и скорости по своему объему как абсолютно твердое тело – мгновенно, а сами приращения давления ограничены по величине. То есть необходим учет сжимаемости жидкости наряду с ее инерционными свойствами.

Имея это в виду можно представить следующую картину гидродинамических процессов при гидравлическом ударе. Для определенности рассуждений рассмотрим процессы в простом горизонтальном трубопроводе, соединенном с большим резервуаром при перекрытии клапана, установленного на его свободном конце, рис. 7, *а*. Жидкость будем считать идеальной.

В начальный момент имеем установившееся течение с постоянной скоростью v_0 по всей длине трубопровода. Давление в системе также постоянно и равно p_0. Так как резервуар большой, то давление в нем остается постоянным в течение всего времени процесса.



а) *б*)

Рис. 7. Иллюстрация стадий гидравлического удара в простом трубопроводе, соединенном с большим резервуаром при перекрытии клапана

Перекрытие клапана приводит к торможению жидкости, примыкающей к его затвору. Вследствие инерционности близлежащие к клапану слои жидкости сжимаются, и давление в них возрастает на величину $\Delta p_{уд}$. В остальной части трубопровода давление и скорость пока по-прежнему равны p_0 и v_0. В зоне повышенного давления возникают упругие деформации стенок трубопровода, его диаметр увеличивается (см. состояние 1. на рис. 7, *а*).

На остановившийся слой жидкости набегает масса ближайшего слоя из невозмущенной части трубопровода и также тормозится, давление в нем возрастает так же на величину $\Delta p_{уд}$, что приводит и к деформации стенок трубопровода в этом месте. Такой процесс послойного торможения жидкости и увеличения давления в этих слоях продолжается, пока не охватит весь объем трубопровода (см. состояние 2. на рис. 7, *а*). Скорость *c*, с которой возмущения давления $\Delta p_{уд}$ распространяются по трубопроводу, связаны с деформацией (послойным сжатием) жидкости. Следовательно, она определятся только упругими свойствами жидкости, и не зависит от гидродинамических параметров*.

В момент времени, когда волна сжатия охватит весь трубопровод, на диаграмме давления в месте его стыка с баком возникнет разрыв, который физически не может существовать. Поэтому ближайший к баку слой жидкости расширится до состояния, при котором давление в нем и в баке выровнятся. «Лишняя» жидкость будет вытолкнута в бак, то есть расширенная часть жидкости приобретет скорость, направленную противоположно исходному направлению течения. Величина этой скорости равна v_0, так как она является следствием высвобождения энергии, «закаченной» в жидкость при ее сжатии, а сжатие произошло вследствие торможения жидкости от скорости v_0 до нуля. В зоне трубопровода, где произошло понижение давления, стенки трубопровода возвращаются в исходное состояние (см. состояние 3. на рис. 7, *а*).

Разрыв давления, первоначально располагавшийся в месте стыка трубопровода с баком, переместится внутрь него, что приведет к расширению следующего слоя жидкости до давления p_0. Эта жидкость также приобретет скорость $-v_0$, а стенки трубопровода вернутся в этом месте в исходное состояние. Такое послойное расширение и вовлечение жидкости в обратное течение будет продолжаться, пока волна расширения не достигнет клапана (см. состояние 4. на рис. 7, *а*). Скорость движения волны расширения также равна c, так как этот процесс определяется только упругими свойствами жидкости.

В момент, когда волна понижения давления до исходной величины p_0 достигнет клапана, скорость жидкости на его поверхности станет равной нулю, так как на стенке действуют условия прилипания. Поэтому в близлежащем к клапану слое жидкости возникнет положительный градиент скорости. В силу инерционности жидкости это вызовет дальнейшее понижение давления в заторможенных слоях. Величина понижения равна $\Delta p_{уд}$, так как по сравнению с ударным повышением давления этот процесс отличается только знаком производной скорости. В области пониженного давления (перерасширенной жидкости) интенсивность напряженно-деформированного состояния стенок трубопровода понизится и диаметр трубопровода уменьшится. В остальной части трубопровода сохраняются прежние параметры: p_0, $-v_0$ (см. состояние 5. на рис. 7, *а*).

Существующий на стыке слоев разрыв скорости вызывает торможение следующего слоя, его перерасширение на $-\Delta p_{уд}$ и уменьшение диаметра трубопровода в этом месте. Процесс перерасширения и торможения продолжается послойно до тех пор, пока он не охватит всю область трубопровода (см. состояние 6. на рис. 7, *а*). Скорость движения этой волны расширения также равна c по причинам, отмеченным выше.

---

* Это справедливо только, если жидкость не содержит нерастворенный газ, а стенки трубопровода абсолютно жесткие. Далее будет показано, что в газонасыщенной жидкости скорость c зависит от давления и количества нерастворенного газа в жидкости и, кроме того, от деформируемости стенок трубопровода.

По окончании предыдущей стадии в месте стыка трубопровода с баком на диаграмме давления образуется разрыв (давление в баке больше, чем в трубопроводе). Вследствие этого жидкость начинает поступать в трубопровод, сжимая близлежащий к баку слой до выравнивания давления в нем с давлением в баке, то есть давление в этом слое повышается на величину $\Delta p_{уд}$. Очевидно, что скорость движения жидкости, находящейся в сжатом слое, равна v_0, так как сжатие жидкости происходит на ту же величину, что и первой фазе удара. Давление в сжатом слое жидкости воздействует на стенки трубопровода, увеличивая его диаметр в этом место до первоначальной величины (см. состояние 7. на рис. 7, *а*).

Волна давления, вызывающая послойное сжатие жидкости, распространяется по трубопроводу со скоростью c до тех пор, пока не достигнет клапана. В этот момент давление по всему трубопроводу становится равным p_0, а скорость v_0. То есть повторяется ситуация, существовавшая на начало первой фазы гидравлического удара. После этого весь процесс распространения волн сжатия-расширения повторяется.

В идеальной жидкости такой волновой нестационарный процесс будет длиться бесконечно. В реальной вязкой жидкости происходит диссипация механической энергии и колебания затухают. Устанавливается новое состояние жидкости с параметрами $v = 0$ и $p = p_0$.

Описанную выше картину нестационарных гидродинамических процессов кратко можно сформулировать следующим образом. При мгновенном торможении потока возникает волна сжатия, которая распространяется вверх по ходу течения со скоростью c, зависящей от упругих свойств жидкости. Достигнув бака, волна сжатия отражается от него волной разрежения такой же интенсивности. Эта волна со скоростью c распространяется по трубопроводу в направлении, совпадающим с первоначальным направлением течения. Достигнув клапана, волна разрежения отражается от него также волной разрежения такой же интенсивности и распространяется по направлению к баку. От бака она отражается волной сжатия.

Таким образом, *от жесткой стенки волны сжатия отражаются волнами сжатия, а волны разрежения – волнами разрежения такой же интенсивности. От объектов с постоянным давлением (большой резервуар, окружающая атмосфера, магистральный трубопровод и пр.) волна сжатия отражается волной разрежения, а волна разрежения – волной сжатия такой же интенсивности.*

Описанная выше качественная картина ударно-волновых процессов идеализирована не только потому, что не учитывает диссипацию механической энергии. При возникновении волны разрежения давление не может понизиться ниже давления насыщенных паров в ней. При достижении этого давления произойдет нарушение сплошности потока – кавитация. Это значительно усложняет моделирование нестационарных ударно-волновых процессов, так как требует совместного рассмотрения изменения гидродинамических параметров в жидкости и параметров состояния в кавитационной полости.

1.3. Термины и определения в теории гидравлического удара

Если гидравлический удар представляет собой волну сжатия, то он называется *положительным*. Удар, вызывающий волну понижения давления называется *отрицательным*.

Волна изменения давления (сжатия или расширения), распространяющаяся вверх по потоку, называется *прямой*. Волна противоположного направления – *обратной*.

Поверхность, отделяющая жидкость после прохождения волны от невозмущенного потока называется *фронтом ударной волны*.

Фронт ударной волны (сжатия или расширения) перемещается по невозмущенной жидкости со скоростью, которая называется *скоростью ударной волны*.

Время, в течение которого фронт ударной волны проходит двойную длину трубы, называют *фазой гидроудара* или *временем прямого удара*.

Гидравлический удар называется *прямым*, если время перекрытия клапана меньше (фазы гидроудара) времени прямого удара. В противном случае гидроудар *непрямой.*

1.4. Вклад российских ученых в исследования гидравлического удара

Впервые основополагающие теоретические и экспериментальные исследования явления гидравлического удара были выполнены выдающимся русским гидродинамиком Жуковским Николаем Егоровичем в 1897–1899 гг [3][*]. На натурном оборудовании им были проведены экспериментальные исследования гидродинамических параметров при изменении времени перекрытия отсекающей задвижки, проанализированы имеющиеся на то время в мировой практике разрозненные теоретические и экспериментальные результаты по исследованию аналогичных процессов. Н.Е. Жуковский впервые обосновал необходимость учета сжимаемости жидкости для описания гидродинамических процессов гидроудара. Им получены волновые уравнения, описывающие изменение гидродинамических параметров в трубопроводах при гидроударе и конечные соотношения, позволяющие определить максимальное давление при прямом и непрямом гидравлическом ударе.

Проведенные исследования позволили выяснить закономерности изменения давления и скорости потока при возникновении ударно-волновых процессов в трубопроводах. В частности Н.Е. Жуковский установил, что:

1. Волны давления при гидравлическом ударе распространяются по трубопроводам с постоянной скоростью *c*, которая не зависит от интенсивности ударной волны, а определяется физическим свойствами жидкости, материала трубопровода и отношением толщины стенки трубопровода к его диаметру.

---

[*] Исследования проводились в интересах «Московского водопровода».

2. Интенсивность ударной волны пропорциональна изменению скорости потока Δv, вызвавшему возникновение волны, и скорости распространения волн c. При распространении ударной волны по трубопроводу постоянного сечения ее интенсивность практически не меняется.

3. Характеристики транзитного (фонового) течения не влияют на интенсивность ударной волны.

4. Явление периодического колебания давления в трубопроводе, возникающее при гидроударе, объясняется отражением ударной волны от концов трубопровода (задвижки, свободного конца трубы, резервуара, магистрального трубопровода и пр.)

5. При переходе ударной волны из трубопровода большого диаметра в трубопровод малого диаметра интенсивность ударной волы возрастает. При достижении тупикового конца трубопровода интенсивность отраженной ударной волны удваивается, и такое удвоение может повторяться несколько раз.

6. Простейшим способом защиты от гидравлического удара является ограничение скорости закрытия задвижки. При этом время «безопасного» перекрытия задвижки должно быть пропорционально длине трубопровода.

7. Установка предохранительных клапанов вблизи источника удара ограничивает его интенсивность величиной давления настройки клапана.

В исследование и разработку методов расчета гидродинамических параметров при гидравлическом ударе, в том числе с учетом явления кавитации, и методов защиты от гидроудара большой вклад внесли российские ученые И.А. Чарный Н.А. Картвелишвили, А.А. Морозов, М.А. Мостков, Д.Н. Смирнов, Л.Б. Зубов и др.

В настоящее время развиваются методы расчета ударных течений, основанные на численном интегрировании уравнений Рейнольдса.

Проведенные исследования позволили создать и обеспечить работоспособность различных гидравлических систем: гидроприводов, авиационных и ракетных двигателей, других гидросистем машиностроительного профиля, трубопроводных систем водо- и теплоснабжения, магистральных трубопроводных систем, в том числе проложенных подземно и подводно, гидросистем гидроэлектростанций т. д.

1.5. Контрольные вопросы

1. Опишите внешние признаки гидравлического удара.
2. Каковы причины возникновения гидравлического удара.
3. Каковы возможные последствия гидравлического удара.
4. Опишите картину нестационарных гидродинамических процессов при перекрытии клапана на трубопроводе, соединенном с большим резервуаром.
5. От каких параметров зависит скорость распространения волн сжатия при гидравлическом ударе?
6. Что означают термины «положительный» и «отрицательный гидроудар»?
7. Что означают термины «прямая» волна и «обратная» волна?

8. Что означают термин «фронт ударной волны»?
9. Что означают термин «скорость ударной волны»?
10. Что означают термин «фаза гидравлического удара»?

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЖИМАЕМОСТИ ЖИДКОСТИ. ФОРМУЛА ЖУКОВСКОГО

2.1. Характеристики сжимаемости жидкости

Гидравлический удар – это одна из форм волнового процесса в гидросистеме. Внешние воздействия на движущийся поток реальной жидкости в гидросистеме (работа насосного агрегата, переключения гидроаппаратуры, перемещение поршней гидроцилиндров и т. п.) всегда сопровождаются возникновением в ней волн сжатия-расширения вследствие ее *сжимаемости*.

Сжимаемость жидкости характеризуется изотермическим коэффициентом сжатия $\gamma = 1/\rho\left(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}p\right)$, который связан с модулем упругости $E_{ж}$ жидкости формулой

$$E_{ж} = \frac{1}{\gamma}. \tag{2.1}$$

Модуль упругости связан со скоростью звука в жидкости a_0 соотношением

$$a_0 = \sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho_{ж}}}, \tag{2.2}$$

где $\rho_{ж}$ – плотность жидкости.

2.2. Формула Жуковского

Рассмотрим участок трубопровода, заполненный жидкостью, ограниченный с одной стороны поршнем, рис. 8. Пусть жидкость содержит нерастворенный в ней газ с объемной долей β.

$$\beta = \frac{W_{г}}{W_{г} + W_{ж}}, \tag{2.3}$$

где $W_{г}$, $W_{ж}$ – объем газа и жидкости соответственно в рассматриваемом участке трубопровода.

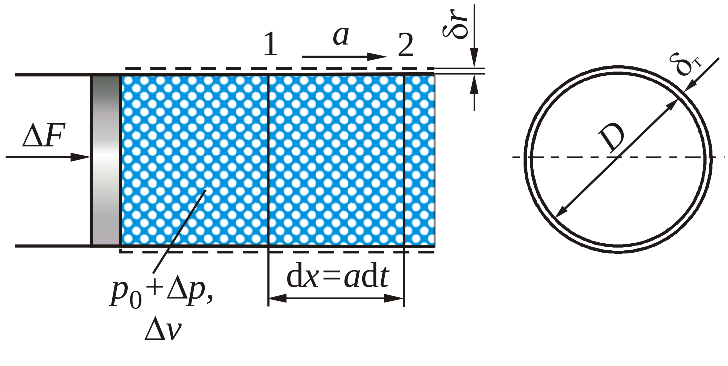


Рис. 8. К определению скорости волны

Плотность смеси жидкости и газа определится через плотности составляющих следующим образом

$$\rho_{см} = \frac{\rho_{г} W_{г} + \rho_{ж} W_{ж}}{W_{г} + W_{ж}} = \beta\rho_{г} + \left(1-\beta\right)\rho_{ж}. \tag{2.4}$$

Пусть в начальный момент времени поршень находится в покое, то есть скорость жидкости равна нулю $v = 0$. Приложим к поршню силу ΔF, под действием которой поршень переместится и приведет в движение слои жидкости, располагающиеся вблизи него. Скорость жидкости в этих слоях возрастет на величину Δv, а давление на Δp и данные возмущения распространяются от слоя к слою со скоростью a. За интервал времени $\mathrm{d}t$ волна возмущений распространится на величину $\mathrm{d}x = a \cdot \mathrm{d}t$, например, от сечения 1 до сечения 2, что приведет к изменению количества движения жидкости, заключенной между этими сечениями. В соответствии с законом сохранения количества движения можем записать

$$\rho_{\text{см}} S\, \mathrm{d}x \Delta v = \Delta p S\, \mathrm{d}t - \mathrm{d}F_{\text{тр}}\, \mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Если пренебречь импульсом сил трения $\mathrm{d}F_{\text{тр}}\,\mathrm{d}t$ по сравнению с импульсом сил давления $\Delta pS\,\mathrm{d}t$ и учесть, что $\mathrm{d}x / \mathrm{d}t = a$, то получим следующее уравнение, связывающее приращение давления и скорости жидкости в волне

$$\Delta p = \rho_{\text{см}} a \Delta v, \tag{2.6}$$

которое носит имя Жуковского.

2.3. Скорость распространения волн

Скорость распространения волн a необходимо знать для расчета гидродинамических параметров волновых процессов. Она зависит от природы рабочей жидкости, ее температуры, содержания нерастворенного газа β и давления p. Кроме того, на скорость распространения волн влияет и деформативность стенок гидролинии. Найдем эту зависимость.

Считая границы сечений 1 и 2 (см. рис. 8) неподвижными, запишем закон сохранения массы для объема жидкости, заключенной между ними при прохождении волны сжатия

$$\rho_{\text{см}} S \Delta v\, \mathrm{d}t = \left(\rho_{\text{см}} - \rho_{\text{см}0}\right) S\, \mathrm{d}x + \rho_{\text{см}} \pi D \delta r\, \mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Здесь $\rho_{\text{см}0}$ – плотность невозмущенной жидкости, содержащей нерастворенный газ; D – диаметр трубопровода; δr – приращение радиуса трубопровода за счет повышения давления на величину Δp. Первое слагаемое в правой части (2.7) представляет собой увеличение массы жидкости за счет изменения плотности, обусловленного сжатием, как газа, так и жидкости, а второе – за счет деформации стенок трубопровода. Разделим обе части (2.7) на $\rho_{\text{см}} S \mathrm{d}x$ и учтем, что $\mathrm{d}x / \mathrm{d}t = a$

$$\frac{\Delta v}{a} = \frac{\rho_{\text{см}} - \rho_{\text{см}0}}{\rho_{\text{см}}} + \frac{\pi D \delta r}{S} = \frac{\delta \rho_{\text{см}}}{\rho_{\text{см}}} + \frac{\pi D \delta r}{S}. \tag{2.8}$$

Преобразуем первый член правой части (2.8). Для этого рассмотрим некоторую массу жидкости $m = \rho_{\text{см}} W$, подвергающуюся сжатию давлением $\mathrm{d}p$. При сжатии масса не изменяется, поэтому $\rho_{\text{см}} W = \rho_{\text{см}0} W_0$. Так как левая и правая части этого равенства константы, то дифференцируя, получим

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\text{см}}}{\rho_{\text{см}}}=-\frac{\mathrm{d}W}{W}. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_{\text{г}}+\mathrm{d}W_{\text{ж}}$ и $W=W_{\text{г}}/\beta=W_{\text{ж}}/\left(1-\beta\right)$ представим (2.9) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\text{см}}}{\rho_{\text{см}}}=-\left[\beta\frac{\mathrm{d}W_{\text{г}}}{W_{\text{г}}}+\left(1-\beta\right)\frac{\mathrm{d}W_{\text{ж}}}{W_{\text{ж}}}\right]. \tag{2.10}$$

Процесс сжатия будем считать адиабатическим, тогда справедливо соотношение $pW_{\text{г}}^{k}=p_0W_{\text{г}0}^{k}$, дифференцируя которое, получим

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{p}=-k\frac{\mathrm{d}W_{\text{г}}}{W_{\text{г}}}. \tag{2.11}$$

Для капельной жидкости изменение объема при сжатии связано с изменением давления через модуль упругости (закон Гука для жидкости) $E_{\text{ж}}$:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{ж}}}{W_{\text{ж}}}=-\frac{\mathrm{d}\,p}{E_{\text{ж}}}. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) и (2.12) в (2.10), получим

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\text{см}}}{\rho_{\text{см}}}=\mathrm{d}\,p\left[\frac{\beta}{kp}+\frac{\left(1-\beta\right)}{E_{\text{ж}}}\right]. \tag{2.13}$$

Ограничимся рассмотрением малых приращений давления в волне сжатия. Тогда первый член правой части уравнения (2.8) может быть представлен в форме (2.13).

Преобразуем теперь последний член (2.8).

Так как $\delta r=\delta D/2$, то

$$\frac{\pi D\delta r}{S}=2\frac{\delta D}{D}. \tag{2.14}$$

В соответствии с законом Гука для твердых тел

$$\frac{\delta D}{D}=\frac{\Delta\sigma}{E_{\text{т}}}, \tag{2.15}$$

где $\Delta\sigma$ – приращение напряжений материала стенки трубопровода при повышении давления на Δp; $E_{\text{т}}$ – модуль упругости материала трубопровода.

$$\Delta\sigma=\frac{\Delta pD}{2\delta_{\text{т}}}, \tag{2.16}$$

где $\delta_{\text{т}}$ – толщина стенки трубопровода.

Подставив (2.15) и (2.16) в (2.14), получим

$$\frac{\pi D\delta r}{S}=\frac{\Delta pD}{E_{\text{т}}\delta_{\text{т}}}. \tag{2.17}$$

С учетом (2.6), (2.13) и (2.17) выражение (2.8) примет вид

$$\frac{1}{a^2}=\rho_{\text{см}}\left[\frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0+\Delta p}+\frac{1-\beta}{E_{\text{ж}}}+\frac{D}{E_{\text{т}}\delta_{\text{т}}}\right]. \tag{2.18}$$

Соотношение (2.18) показывает, что скорость распространения волн в газонасыщенной жидкости зависит от величины приращения давления Δp. При этом скорость волн сжатия тем выше, а волн разрежения тем ниже, чем больше величина приращения Δp. Увеличение газосодержания (увеличение β) уменьшает скорость распространения волн. Эти факты имеют существенное значение при расчете параметров гидроудара.

Объемная доля нерастворенного газа в рабочей жидкости β изменяется при изменении давления в гидросистеме, сопровождающего волновой нестационарный процесс, так как объем газа при повышении давления уменьшается. Найдем эту зависимость.

Исходя из определения β, можем записать

$$\beta = \frac{W_г}{W_г + W_ж} = \frac{1}{1 + \dfrac{W_ж}{W_г}}, \tag{2.19}$$

где $W_г$, $W_ж$ – объем газа и жидкости соответственно.

Обозначив через β_0 объемную долю газа при давлении p_0, через $W_{г0}$, $W_{ж0}$ объем газа и жидкости при том же давлении, через $W_{\Sigma 0} = W_{г0} + W_{ж0}$ суммарный объем рабочей жидкости и учитывая несжимаемость жидкости*, перепишем (2.19) в виде

$$\beta = \frac{1}{1 + \dfrac{W_ж}{W_г}\dfrac{W_{г0}}{W_{г0}}\dfrac{W_{\Sigma 0}}{W_{\Sigma 0}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1-\beta_0}{\beta_0}\dfrac{W_{г0}}{W_г}}. \tag{2.20}$$

Тогда, с учетом уравнения адиабаты $\dfrac{W_{г0}}{W_г} = \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}$, получаем искомую зависимость

$$\beta = \frac{1}{1 + \dfrac{1-\beta_0}{\beta_0}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}}. \tag{2.21}$$

Скорость звука. Скорость распространения слабых волн $(\Delta p << p_0)$ принято называть скоростью звука и обозначать a_0. Из (2.18) следует, что

$$\frac{1}{a_0^2} = \rho_{см}\left[\frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0} + \frac{1-\beta}{E_ж} + \frac{D}{E_т\delta_т}\right]. \tag{2.22}$$

Вводя приведенный модуль упругости E

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0} + \frac{1-\beta}{E_ж} + \frac{D}{E_т\delta_т}, \tag{2.23}$$

формулу (2.22) можно записать в виде

* В данном случае сжимаемость жидкости по сравнение со сжимаемостью газа можно пренебречь.

$$a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_{\text{см}}}}. \qquad (2.24)$$

Если жидкость не содержит газа $(\beta = 0)$, а стенки трубопровода жесткие $(E_{\text{т}} \to \infty)$, то $E = E_{\text{ж}}$ и скорость распространения слабых и умеренно сильных волн, несущих изменение давления $\Delta p << E_{\text{ж}}$

$$a \approx a_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,\rho}} = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}}. \qquad (2.25)$$

Например, для воды ($\rho = 10^3$ кг/м^3, $E_{\text{ж}} = 2{,}1\cdot10^9$ Па) $a_0 = 1450$ м/с, а для масла АМГ–10 ($\rho = 850$ кг/м^3, $E_{\text{ж}} = 1{,}35\cdot10^9$ Па) $a_0 = 1250$ м/с.

Упругие стенки трубопровода снижают скорость распространения волн. В этом случае

$$a_0 = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}\frac{1}{1+\dfrac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{т}}}\dfrac{D}{\delta_{\text{т}}}}}. \qquad (2.26)$$

Например, при относительной толщине трубопровода $\delta/D = 1/20$ в стальной трубе ($E_{\text{т}} = 2{,}1\cdot10^{11}$ Па) скорость волны в воде $a_0 = 1450/1{,}1 = 1320$ м/с, а в масле $a_0 = 1250/1{,}06 = 1190$ м/с.

Интересно отметить, что при низком давлении скорость звука в газожидкостной смеси может быть существенно ниже, чем даже скорость звука в газе, что видно из рис. 9, где приведены результаты расчета по формуле (2.22) скорости звука в воде, содержащей воздух.

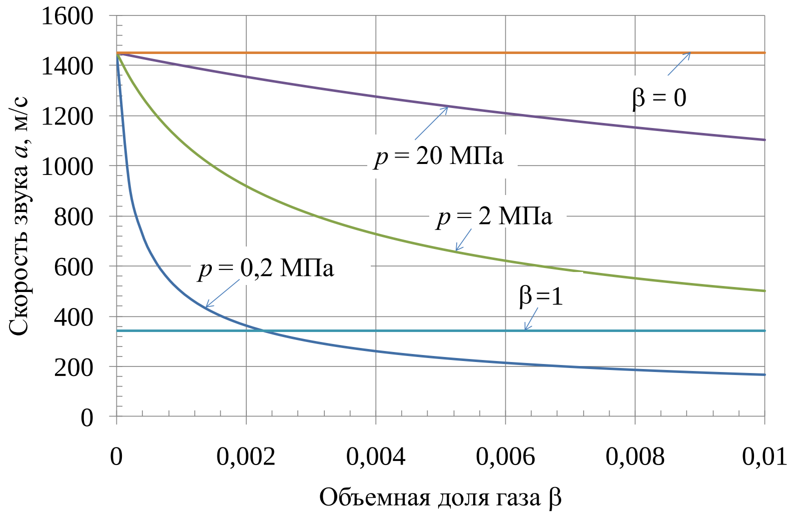


Рис. 9. Влияние давления и газосодержания на скорость звука

Полученные зависимости используются далее в разделах 3…5 для расчета изменения гидродинамических параметров при гидравлическом ударе.

2.4. Контрольные вопросы

1. Запишите формулу, связывающую скорость звука в жидкости и модуль ее упругости.
2. Запишите формулу Жуковского.
3. Каким образом приращение давления при гидроударе связано со скоростью распространения волн?
4. Каким образом приращение давления при гидроударе связано с изменение скорости потока?
5. Как влияет плотность жидкости на давление гидроудара?
6. Как влияет величина давления на скорость распространения волн давления в газонасыщенной жидкости?
7. Скорость распространения волн давления с увеличением газосодержания возрастает?
8. Скорость распространения волн давления с увеличением модуля упругости материала стенок трубопровода возрастает?
9. Скорость распространения волн давления с увеличением диаметра трубопровода возрастает?
10. Скорость распространения волн давления с увеличением толщины стенки трубопровода возрастает?

3. РАСЧЕТ ГИДРОУДАРА ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим решение задачи распространения ударной волны в сжимаемой вязкой жидкости в горизонтальном жестком трубопроводе постоянного сечения при перекрытии клапана, расположенного на его выходе. Трубопровод состыкован с баком, в котором давление поддерживается постоянным. Скорость распространения волн давления в жидкости принята постоянной.

Ниже, в качестве иллюстрации применения данного метода для решения этой задачи, излагаются основные этапы численного моделирования с использованием простейшей разностной схемы. Отмечаются некоторые особенности, которые могут возникнуть в процессе решения.

3.1. Математическая постановка задачи

В рассматриваемом нами примере течение будем предполагать одномерным с равномерным распределением гидродинамических параметров по поперечному сечению. Система уравнений для данной задачи имеет вид:

- уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial x}=0\,; \qquad (3.1)$$

- уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-a_{\mu}\,, \qquad (3.2)$$

где w, ρ, p – средние по сечению трубопровода скорость, плотность и давление соответственно.

В уравнении (3.2) через a_{μ} обозначена отнесенная к единице массы жидкости сила вязкого сопротивления. Выразим ее через напряжение трения на стенках канала τ_{w} следующим образом

$$a_{\mu}=\frac{\tau_w \mathrm{P}\mathrm{d}x}{\rho S\mathrm{d}x}=\frac{\tau_w \mathrm{P}}{\rho S}\,,$$

где P, S – периметр и площадь сечения трубопровода соответственно.

Так как $\tau_w = \lambda\rho w^2/8$, то последняя формула для круглого трубопровода диаметром d примет вид

$$a_{\mu}=\frac{\lambda w^2}{2d}\frac{w}{|w|}\,. \qquad (3.3)$$

Множитель $w/|w|$ добавлен в последней формуле для того, чтобы сила вязкости действовала противоположно направлению скорости w. Для определения коэффициента гидравлического трения будем использовать формулы, справедливые для стационарных течений:

- при ламинарном режиме течения

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}_d}\,; \qquad (3.4)$$

- при переходном и турбулентном режиме течения

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{k_s}{d} + \frac{68}{\mathrm{Re}_d}\right)^{0{,}25}. \tag{3.5}$$

Здесь $\mathrm{Re}_d = wd / \nu$ – число Рейнольдса, определенное по диаметру трубопровода d; k_s – высота бугорков шероховатости трубопровода.

Учитывая, что приращение давления при гидроударе существенно превышает возможные потери на трение, можно ожидать, что использование стационарного приближения для расчета коэффициента гидравлического трения не внесет существенной погрешности в результаты расчетов.

Преобразуем уравнения (3.1), (3.2) к удобному для решения виду. Для учета сжимаемости среды представим первое слагаемое в (3.1) в следующем виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{3.6}$$

где $E = \rho \mathrm{d}p / \mathrm{d}\rho$ – модуль упругости жидкости. Тогда, учитывая, что $E / \rho = a^2$ (a – скорость распространения волн давления в жидкости) уравнение (3.1) запишем следующим образом

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{3.7}$$

Упростим уравнение (3.2), учитывая, что сжимаемость реальных жидкостей, характеризуемая модулем упругости E, как правило, незначительна. По крайней мере, в большинстве случаев справедливо соотношение $E >> p$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + \frac{p}{\rho E}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x}.$$

С учетом последнего соотношения и (3.3) уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\lambda w^2}{2d}\frac{w}{|w|} = 0. \tag{3.8}$$

Итак имеем систему двух уравнений (3.7), (3.8) относительно двух неизвестных: давления p и скорости w. В качестве начальных условий задаем $w(t=0,x)=0$, $p(t=0,x)=p_0$, то есть условия покоящейся жидкости. Для формирования граничных условий при $x = 0$ будем считать, что трубопровод стыкуется с большим резервуаром, давление в котором постоянно и равно p_0 (сам метод задания левых граничных условий описан ниже). На правом конце трубопровода $x = L$ зададим переменные по времени граничные условия: при $t < t_0$, $p(t, x=L) = p_{\text{н}}$ (где $p_{\text{н}}$ – давление окружающей среды); при $t \ge t_0$, $w(t, x=L) = 0$. То есть считаем, что при времени $t = t_0$ трубопровод в выходном сечении мгновенно перекрывается. При расчетах время t_0 будем задавать таким, чтобы к этому моменту сформировалось стационарное поле скорости и давления жидкости в трубопроводе при ее истечении при полностью открытом клапане.

3.2. Конечно-разностная аппроксимация и метод решения

Для конечно-разностной аппроксимации рассматриваемой нами задачи используем интегральный метод. Для этого построим сетку с равномерными шагами по координате $x_j - x_{j-1} = h$ и времени τ, рис. 10.

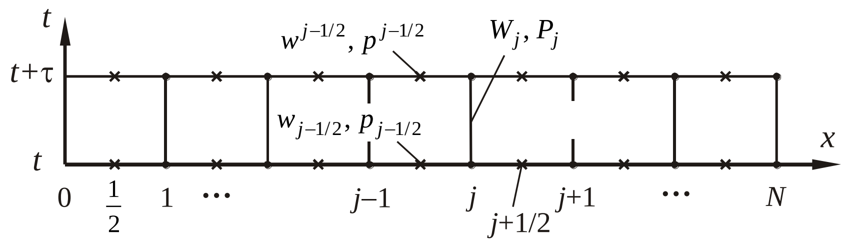


Рис. 10. Схема расчетной сетки

Параметры на границах ячеек обозначим прописными буквами. Они имеют целочисленный индекс. Их считаем постоянными на временном интервале интегрирования τ. Параметры в середине ячейки (обозначенные строчными буквами и имеющие дробный индекс) считаем не зависящими от координаты в пределах шага сетки h. Эти параметры, относящиеся к нижнему временному слою, обозначаются с нижним расположением индекса, а относящиеся к верхнему временному слою – с верхним расположением, см. рис. 10. Истинные значения скорости и давления в трубопроводе будут аппроксимироваться значениями параметров в серединах ячеек (с дробными индексами).

Проинтегрируем по объему ячейки составленные уравнения (по x от 0 до h, по t от 0 до τ). В частности, для уравнения (3.7) имеем

$$\int_0^h\int_0^\tau\left(\frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0\,. \tag{3.9}$$

Рассмотрим интеграл от первого слагаемого (3.9)

$$\int_0^h\int_0^\tau\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^h\int_0^\tau \mathrm{d}p\mathrm{d}x \approx \int_0^h\left(p^{j-1/2} - p_{j-1/2}\right)\mathrm{d}x \approx \left(p^{j-1/2} - p_{j-1/2}\right)h\,. \tag{3.10}$$

При интегрировании второго слагаемого скорость w принимаем равной своему значению в центре ячейки на нижнем временном слое. Тогда имеем

$$\int_0^h\int_0^\tau w\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \approx \int_0^\tau w_{j-1/2}\left(P_j - P_{j-1}\right)\mathrm{d}t \approx w_{j-1/2}\left(P_j - P_{j-1}\right)\tau\,. \tag{3.11}$$

Интегрирование третьего слагаемого дает

$$\int_0^h\int_0^\tau \rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \approx \int_0^\tau \rho a^2\left(W_j - W_{j-1}\right)\mathrm{d}t \approx \rho a^2\left(W_j - W_{j-1}\right)\tau\,. \tag{3.12}$$

С учетом (3.10)…(3.12) уравнение (3.9) принимает вид

$$p^{j-1/2} = p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}\left[w_{j-1/2}\left(P_j - P_{j-1}\right) + \rho a^2\left(W_j - W_{j-1}\right)\right] \tag{3.13}$$

Аналогично интегрируется и уравнение (3.8)

$$w^{j-1/2} = w_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}\left[\left(\frac{W^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)_j - \left(\frac{W^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)_{j-1}\right] - \frac{\lambda_{j-1/2} w_{j-1/2}^2}{2d}\frac{w_{j-1/2}}{\left|w_{j-1/2}\right|}\tau. \qquad (3.14)$$

Таким образом, формулы (3.13) и (3.14) позволяют вычислить скорость и давление в центрах ячеек сетки на верхнем временном слое (при $t = t + \tau$) по известным своим значениям на нижнем временном слое (при $t = t$), если известны параметры течения на границах ячейки. Для определения этих величин используется решение задачи о распаде разрыва гидродинамических параметров.

Задача о распаде разрыва. В рассматриваемой разностной схеме используется кусочно-постоянная аппроксимация параметров потока по длине трубопровода. То есть на начало каждого рассчитываемого интервала времени на границах ячейки имеется разрыв параметров. Это разрыв физически не может существовать и должен распасться. Таким образом, если удастся определить, как изменяются давление и скорость при распаде их разрыва, то мы сможем найти необходимые «большие» величины P и W.

Вновь рассмотрим уравнения (3.7) и (3.8). Оценим порядок их слагаемых. Так как, в соответствии с (2.6) изменение давления при гидроударе имеет порядок $\Delta p \sim \rho a \Delta w$, то справедлива оценка

$$w\frac{\partial p}{\partial x} \sim \rho a w \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Следовательно, можно пренебречь вторым слагаемым уравнения (3.7) по сравнению с третьим. Аналогично оценивая члены уравнения (3.8), получим, что можно пренебречь кинетической энергией потока под знаком производной. Кроме того, при решении задачи распада разрыва не будем учитывать действие сил вязкости, что позволит получить простые алгебраические выражения для «больших величин». После упрощения система (3.7), (3.8) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Умножим первое уравнение (3.15) на $1/\rho a$. Полученное уравнение сложим со вторым. Затем из второго уравнения вычтем первое, умноженное на $1/\rho a$. В результате получается два следующих уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w + \frac{p}{\rho a}\right) + a\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{p}{\rho}\right) = 0; \qquad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w - \frac{p}{\rho a}\right) - a\frac{\partial}{\partial x}\left(w - \frac{p}{\rho}\right) = 0. \qquad (3.17)$$

Введем новые переменные $Y = w + \frac{p}{\rho a}$, $Z = w - \frac{p}{\rho a}$. С учетом этих обозначений уравнения (3.16), (3.17) примут вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + a\frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} - a\frac{\partial Z}{\partial x} = 0. \tag{3.18}$$

Эти уравнения можно рассматривать, как производные от Y вдоль направления $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a$ и Z – вдоль направления $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -a$. Параметры Y и Z носят название *Римановых инвариантов*, а направления $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm a$ называются *характеристиками* системы уравнений (3.18). Равенство нулю производных вдоль указанных направлений свидетельствует о том, что Римановы инварианты сохраняют свои значения на соответствующих характеристиках.

Рассмотрим две соседние ячейки расчетной сетки, рис. 11.

В момент времени $t = 0$ гидродинамические параметры на их границах имеют разрыв, который распадается. Условия постоянства Римановых инвариантов на характеристиках имеют вид:

- на характеристике $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a$

$$\frac{p_{j-1/2}}{\rho a} + w_{j-1/2} = \frac{P_j}{\rho a} + W_j; \tag{3.19}$$

- на характеристике $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -a$

$$\frac{p_{j+1/2}}{\rho a} - w_{j+1/2} = \frac{P_j}{\rho a} - W_j. \tag{3.20}$$

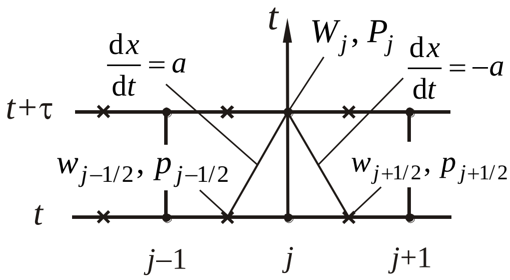


Рис. 11. Распад разрыва на границе ячеек

Из (3.19) и (3.20) находим искомые «большие величины»

$$P_j = \frac{1}{2}\left(p_{j-1/2} + p_{j+1/2}\right) - \frac{\rho a}{2}\left(w_{j+1/2} - w_{j-1/2}\right), \tag{3.21}$$

$$W_j = \frac{1}{2}\left(w_{j-1/2} + w_{j+1/2}\right) - \frac{1}{2\rho a}\left(p_{j+1/2} - p_{j-1/2}\right). \tag{3.22}$$

Таким образом, получаем следующий алгоритм расчета распределения скорости и давления по длине трубопровода:

1) По известным значениям параметров в середине ячеек на предыдущем временном слое $w_{j-1/2}$, $p_{j-1/2}$, $j = \overline{1, N}$ по формулам (3.21), (3.22) находим параметры течения на границах ячеек W_j, P_j, $j = \overline{1, N-1}$.

2) По формулам (3.13), (3.14) вычисляем гидродинамические параметры течения на верхнем временном слое (при $t = t + \tau$) $w^{j-1/2}, p^{j-1/2}, \ j=\overline{1, N-1}$.

Приведенный алгоритм численного решения известен, как метод С.К. Годунова [5].

3) Для того, чтобы найти параметры течения в середине первой и последней ячеек на верхнем временном слое $w^{1/2}$, $p^{1/2}$, $w^{N-1/2}$, $p^{N-1/2}$ необходимо задать граничные условия. Для формирования граничных условий на левой границе канала используем соотношение на характеристике $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-a$, исходящей из ячейки с индексом ½, и соотношение, следующее из уравнения Бернулли, записанное для сечений в резервуаре и на входе в трубопровод:

$$p_0 = P_0 + \zeta_{\text{вх}} \frac{\rho}{2} W_0^2 . \tag{3.23}$$

Решая совместно (3.23) и (3.20) (при $j = 0$) находим выражения для «больших» параметров на левой границе трубопровода

$$W_0 = -2a + 2\sqrt{a^2 + \left(p_0 - p_{1/2}\right)/\rho + w_{1/2} a}\,, \tag{3.24}$$

$$P_0 = p_0 - \zeta_{\text{вх}} \frac{\rho}{2} W_0^2 . \tag{3.25}$$

Для формирования граничных условий на выходе из трубопровода добавим к расчетной сетке справа одну фиктивную ячейку. Параметры в ней при открытом клапане задаем следующим образом $w_{N+1/2} = w_{N-1/2}$, $p_{N+1/2} = p_{\text{н}}$, что имитирует истечение жидкости в атмосферу. После закрытия клапана эти параметры принимают значения $w_{N+1/2} = -w_{N-1/2}$, $p_{N+1/2} = p_{N-1/2}$, чем моделируется жесткая стенка. Искомые величины $w^{1/2}$, $p^{1/2}$, $w^{N-1/2}$, $p^{N-1/2}$ теперь могут быть вычислены с использованием алгоритма, описанного в п. п. 1) и 2) данного раздела*.

3.3. Аппроксимация и устойчивость численного решения

Исходя из метода вычисления «больших величин» можно понять, что если вести интегрирование системы (3.7), (3.8) с шагом большим, чем $\tau^* = h/a$, мы получим нефизическое решение. Действительно, из схемы рис. 11 понятно, что в момент времени $t' > t + h/a$ пересекутся характеристики $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm a$, исходящие не из соседних ячеек с номерами $j-1/2$ и $j+1/2$, а из ячеек, располага-

---

* Заметим, что если для задания граничных условий на входе в трубопровод добавить к нему слева фиктивную ячейку (как это сделано при формировании правых граничных условий) и положить в ней параметры, равные параметрам в резервуаре, результаты расчета будут существенно отличаться от известных экспериментальных данных. Дело в том, что в такой ячейке нельзя задавать скорость равной нулю, так как фактически в прилегающем к трубопроводу объеме резервуара происходит разгон жидкости. Как следует из (3.21), такой подход приведет к существенному занижению давления в начальном сечении трубопровода и, как следствие, к значительному уменьшению скорости течения в нем и уменьшению давления гидроудара.

ющихся левее первой и правее второй. В результате мы получим неверные значения «больших величин» и тем самым будут нарушены законы сохранения (3.8), (3.9).

Численное решение, полученное при таком шаге интегрирования, в лучшем случае, не будет соответствовать истинному протеканию моделируемого физического процесса и приведет к неверной интерпретации результатов расчетов. В худшем случае решение потеряет устойчивость. Ограничение на шаг интегрирования $\tau < \tau^* = h/a$ носит название условия Куранта. Выполнение этого условия сопряжено либо с увеличением шага расчетной сетки по пространству h, либо уменьшением шага интегрирования по времени τ. Первое чревато потерей точности решения, второе – увеличением времен, потребного на решение задачи. *Число Куранта*, определяемое в вычислительной гидродинамике, как

$$\mathrm{Ku} = \frac{\tau}{\min\left[h/(w+a)\right]}, \tag{3.26}$$

где операция минимум берется по всей расчетной области, является важной характеристикой эффективности численной схемы. Для явных разностных схем условие устойчивости решения имеет вид*

$$\mathrm{Ku} < 1. \tag{3.27}$$

В качестве примера, на рис. 12 приведены результаты расчетов рассматриваемой модельной задачи гидравлического удара. Результаты соответствуют одним и тем же моментам времени, но если результаты расчетов давления на рис. 12, *а* (Ku = 0,5) качественно верно описывают процесс распространения ударной волны вверх по трубопроводу и обратной волны разрежения, то рис. 12, *б* (Ku = 1) не поддается никакому физическому трактованию. Причина осцилляций заключается в ошибках округления при работе процессора ЭВМ, что приводит к некоторому нарушению физических законов сохранения в результатах вычислений, так как численная схема находится на границе устойчивости. При Ku > 1 амплитуда осцилляций возрастает и решение полностью теряет устойчивость.

Кроме естественного требования устойчивости численного решения разностная схема, применяемая для решения задачи, должна обладать свойством *аппроксимации*. То есть при уменьшении шагов сетки по времени и пространству разность между дифференциальным оператором исходной системы уравнений и ее разностным аналогом, иначе говоря, *погрешность аппроксимации* должна стремиться к нулю. Оценим эту погрешность для нашей схемы. Для этого разложим разностное решение в ряд Тейлора в окрестности точки ($w_{j-1/2}$, $p_{j-1/2}$).

---

* Явной называется разностная схема, в которой искомые переменные задачи на следующем временном слое явным образом выряжаются через переменные на предыдущем временном слое. В противном случае схема называется неявной. Неявные схемы сохраняют устойчивость решения и при Ku > 1.

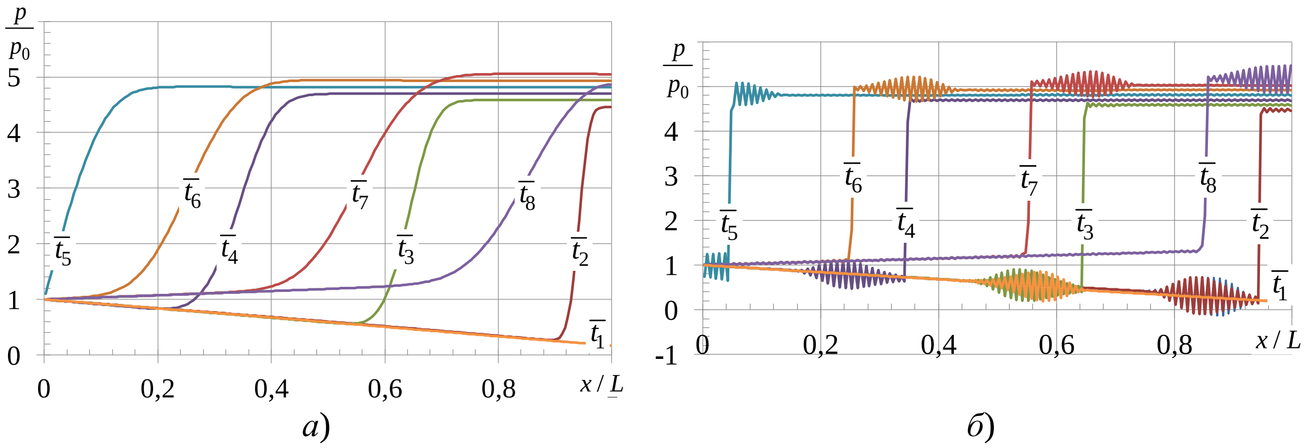


Рис. 12. Изменение давления при гидроударе, $\overline{t} = ta/L$: $\overline{t}_1 = 0$; $\overline{t}_2 = 0{,}065$; $\overline{t}_3 = 0{,}365$; $\overline{t}_4 = 0{,}665$; $\overline{t}_5 = 0{,}965$; $\overline{t}_6 = 1{,}265$; $\overline{t}_7 = 1{,}565$; $\overline{t}_8 = 1{,}865$;
а – Ku = 0,5; *б* – Ku = 1

Для скорости имеем выражения

$$w^{j-1/2} = w_{j-1/2} + \frac{\partial w}{\partial t}\tau + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\tau^2}{2} + O\left(\tau^2\right), \tag{3.28}$$

$$w_{j+1/2} = w_{j-1/2} + \frac{\partial w}{\partial t}h + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{h^2}{2} + O\left(h^2\right), \tag{3.29}$$

$$w_{j-3/2} = w_{j-1/2} - \frac{\partial w}{\partial t}h + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{h^2}{2} + O\left(h^2\right), \tag{3.30}$$

где $O\left(\tau^2\right), O\left(h^2\right)$ – члены разложения второго порядка малости.

Подставим (3.28)…(3.30) и аналогичные разложения для давления в уравнения разностной схемы (3.13), (3.14), (3.21), (3.22). В результате получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + a_\mu = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{h}{2}\left(\frac{w}{\rho a}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. = \frac{1}{\rho a}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + O\left(\tau + h\right), \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{h}{2}\left(\rho a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) + O\left(\tau + h\right). \tag{3.32}$$

Из (3.31), (3.32) видно, что погрешность аппроксимации разностной схемы имеет первый порядок малости $O\left(\tau + h\right)$. При измельчении сетки система (3.31), (3.32) переходит в (3.7), (3.8). Описанная разностная схема называется схемой *первого порядка* аппроксимации. Существуют схемы второго и более высоких порядков, то есть аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений с меньшей погрешностью.

Вместе с тем, необходимо отметить, что система (3.31), (3.32), соответствующая разностной схеме, все-таки отличается от исходной системы уравнений*. Следовательно, численному решению будут присущи свойства, отсутствующие в рассматриваемом физическом процессе. В частности, как видно из рис. 12, *а*, фронт ударной волны в численном решении пологий («размазан»), хотя теоретически он должен иметь вид скачка, так как разностная схема содержит алгоритм вычисления гидродинамических параметров на скачке (распад разрыва). Выясним причину этого факта.

3.4. Течения с разрывами параметров

Используя исходную систему уравнений (3.7), (3.8), заменим производные по времени в правых частях (3.31), (3.32) производными по координате. После преобразований получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)+a_\mu=\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 w^2/2}{\partial t\partial x}+\frac{\partial a_\mu}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{ha}{2}(1-\mathrm{Ku})\left(\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{w}{\rho a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+O(\tau+h), \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+w\frac{\partial p}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)+a_\mu\right]+w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}+w\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\rho a^2\left(\frac{\partial^2 w^2/2}{\partial x^2}+\frac{\partial a_\mu}{\partial x}\right)\right\}+\frac{ha}{2}(1-\mathrm{Ku})\left(\rho w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)+O(\tau+h). \tag{3.34}$$

По аналогии с уравнением Навье-Стокса члены уравнений (3.33), (3.34), включающие вторые производные по координате, можно считать силами вязкости, а множитель

$$\nu_s=\frac{ha}{2}(1-\mathrm{Ku}) \tag{3.35}$$

следует считать некоторой эффективной вязкостью. Величину ν_s называют *схемная вязкость*. Именно наличие схемной вязкости приводит к размазыванию фронта волны.

Как видно из (3.35), схемная вязкость убывает при $\mathrm{Ku}\to 1$. На рис. 13 приведены результаты расчета гидроудара при Ku = 0,995. Остальные данные те же, что и в расчетах, соответствующих рис. 12, *а*.

Приведенные результаты показывают, что, действительно, схемная вязкость исчезла, фронт ударной волны в момент ее возникновения скачкообразный. По мере развития гидроудара фронт волн несколько выполаживается, но это связано с действием коэффициента гидравлического трения λ, имеющегося в математической модели процесса.

---

* В исходной системе правые части равны нулю.

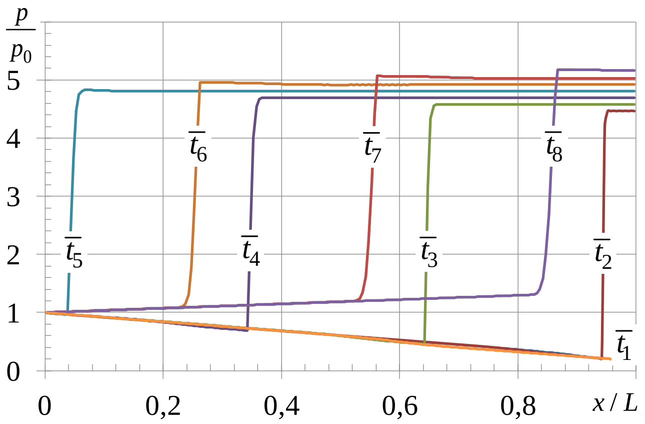


Рис. 13. Изменение давления при гидроударе, Ku = 0,995

Вообще необходимо отметить, что результаты численного моделирования гидрогазодинамических процессов, где возможно образование разрыва параметров (ударных волн, скачков уплотнения), во многих случаях представляют реальную картину в искаженном виде с «размазанными» разрывами. Причин здесь может быть несколько. Это и грубая сетка, и применение схем «сквозного счета», базирующихся на выполнении интегральных законов сохранения и не «обрабатывающие» разрывы, и схемная вязкость. Кроме того, в разностные схемы второго и более высоких порядков специально вводится искусственная вязкость для подавления осцилляций, так как данным схемам присуща немонотонность решения.

Поэтому, если задачей расчетов является идентификация разрывов параметров, то для этого должны выбираться и соответствующие численные методы.

3.5. Нефизическое поведение решения

При численном моделировании возможны ситуации, когда поведение решения не соответствует ожидаемому (исходя из качественных представлений о процессе), либо вообще противоречит физическим законам. Причина этого может, в частности, заключаться в том, что примененная для расчетов математическая модель стала некорректной при реализовавшихся в расчете параметрах. В качестве примера на рис. 14 показаны результаты расчетов распространения волны разрежения после прохождения ударной волны в трубопроводе по математической модели, описанной выше.

Как видим в момент относительного времени $\bar{t}_9 = 2{,}165$ на конечном участке трубопровода реализовалось отрицательное давление, что в невозможно в классической термодинамике. Причина этого кроется в том, что использованная математическая модель описывает только сплошную среду, а в данном расчете в наиболее интенсивной области волны разрежения сплошность нарушается вследствие кавитации жидкости. Для корректного описания процесса математическая модель должна учитывать возможность появления перемещающейся свободной поверхности жидкости с постановкой граничных условий на ней, следующих из модели парового объема кавитационной каверны. Сами уравнения движения жидкости также должны быть изменены для учета потерь массы и количества движения при фазовом переходе.

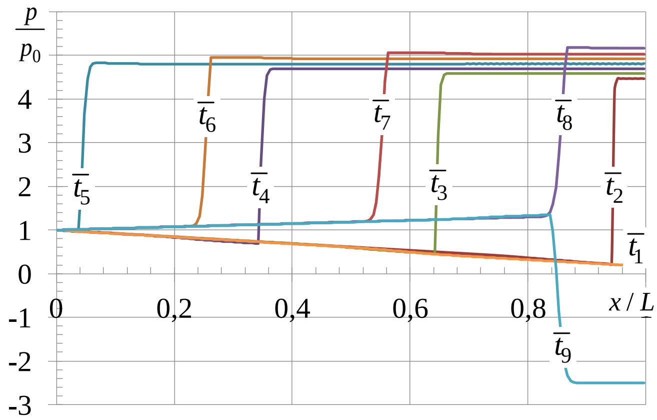


Рис. 14. Распространение волны разрежения по трубопроводу:
$\bar{t}_9 = 2{,}165$ (остальные моменты времени те же, что и на рис. 13)

В заключение заметим, что особенности, присущие численным методам, некоторые из которых отмечены выше, свидетельствуют, что, применение несомненно мощных и полезных инструментов численного моделирования гидрогазодинических параметров требует вдумчивого и аккуратного подхода. Начиная работу по численному моделированию надо четко представлять цель проведения расчетов, выполнить приближенные оценки диапазона изменения параметров процесса, базируясь на которых следует выбирать математическую и постановку и численный метод, в наибольшей степени отвечающие задаче моделирования.

3.6. Контрольные вопросы

1. Каким образом влияет на точность численного решения шаг разностной сетки?
2. Что означает термин «порядок аппроксимации разностной схемы»?
3. Какие параметры определяют устойчивость решения при использовании явных численных схем?
4. Каков физический смысл числа Куранта?
5. Что собой представляет схемная вязкость?
6. Каким образом схемная вязкость влияет на поведение численного решения?

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. Дифференциальные уравнения нестационарного движения жидкости в трубопроводе. Волновые функции

Система дифференциальных уравнений, описывающих нестационарное движение сжимаемой жидкости в трубопроводе, представляет собой уравнение Бернулли и уравнение неразрывности, которые в случае идеальной жидкости, путем их преобразования, приводятся к виду [6]*.

$$\frac{\partial\left(p+\rho aw\right)}{\partial t}+a\frac{\partial\left(p+\rho aw\right)}{\partial x}=0; \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\left(p-\rho aw\right)}{\partial t}-a\frac{\partial\left(p-\rho aw\right)}{\partial x}=0. \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) и (4.2) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами. Их общее решение выражается через произвольные, но дифференцируемые функции координаты и времени:

$$p+\rho aw=2\sum F\left(t-\frac{x}{a}\right)+2F_0; \tag{4.3}$$

$$p-\rho aw=2\sum G\left(t+\frac{x}{a}\right)+2G_0, \tag{4.4}$$

где F_0, G_0 – константы, которые определяются начальными параметрами потока (p_0, w_0):

$$2F_0 = p_0+\rho aw_0; \tag{4.5}$$

$$2G_0 = p_0-\rho aw_0. \tag{4.6}$$

Функции F и G (так называемые волновые функции) определяются внешними возмущениями, вносимыми в поток, а также взаимодействием потока с различными элементами гидросистемы. Если возмущений нет, то $F = G = 0$. Коэффициент «2», присутствующий в выражениях (4.3), (4.4) введен для упрощения вида конечного результата решения.

С учетом (4.5) и (4.6) решение системы (4.3), (4.4) принимает вид

$$\left(p-p_0\right)+\rho a\left(w-w_0\right)=2\sum F\left(t-\frac{x}{a}\right); \tag{4.7}$$

$$\left(p-p_0\right)-\rho a\left(w-w_0\right)=2\sum G\left(t+\frac{x}{a}\right). \tag{4.8}$$

Сложение и вычитание уравнений (4.7) и (4.8) приводит решение к виду, которое в явной форме выражает изменение давления и скорости течения идеальной сжимаемой жидкости через волновые функции:

---

* Такие преобразования мы проделали при решении задачи распада разрыва гидродинамических параметров в разделе 3.

$$\left.\begin{aligned} p - p_0 &= \sum F + \sum G; \\ w - w_0 &= \frac{\left(\sum F - \sum G\right)}{\rho a}. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Рассмотрим подробнее смысл волновых функций $F(t - x/a)$ и $G(t + x/a)$. Пусть состояние потока в сечении 1 с координатой x_1 в момент времени t_1 описывается функциями $F(t_1 - x_1/a)$ и $G(t_1 + x_1/a)$. Так как одинаковым значениям аргумента соответствуют одинаковые значения функций, то изменение состояния потока, наблюдающееся в сечении x_1 в момент времени t_1, повторится позже (при $t_2 > t_1$) в другом сечении 2 с координатой x_2, такой, что:

- для функции $F(t_1 - x_1/a)$ должно выполняться равенство $t_2 - \dfrac{x_2}{a} = t_1 - \dfrac{x_1}{a}$

и, следовательно $x_2 = x_1 + a(t_2 - t_1) > x_1$;

- для функции $G(t_1 + x_1/a)$ должно выполняться равенство $t_2 + \dfrac{x_2}{a} = t_1 + \dfrac{x_1}{a}$

и, следовательно $x_2 = x_1 - a(t_2 - t_1) < x_1$.

Следовательно, изменение состояния потока, описываемое функцией F будет повторяться с некоторым запозданием в сечении $x > x_1$, а возмущения, описываемые функцией G, с опозданием повторится в сечениях с $x < x_1$.

Таким образом, функция $F(t - x/a)$ описывает волны, бегущие вдоль оси x, а уравнение (4.7) – распространение этих волн в потоке жидкости и изменение параметров течения по пути следования этих волн.

Другая функция $G(t + x/a)$ и уравнение (4.8) описывает волны, бегущие против оси x и их влияние на параметры течения.

В начальной стадии волнового процесса, когда присутствуют только две волны, распространяющиеся от источника возмущения, и нет волн отраженных от соседних узлов гидросистемы, изменение давления и скорости потока выражаются только через эти «начальные» волновые функции F и G. В этом случае приращение гидродинамических параметров связано с волновыми функциями формулами:

$$\left.\begin{aligned} p - p_0 &= F + G; \\ w - w_0 &= \frac{F - G}{\rho a}. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Как видно из (4.9), для анализа волновых процессов можно использовать принцип суперпозиции, в соответствии с которым изменение давления и скорости в любой точке потока в любой момент времени определяется путем суммирования соответствующих изменений от каждой волны. Также путем суммирования изменений от каждой волны определяются и параметры течения (давление скорость)*.

---

* Принцип суперпозиции справедлив для любой линейной системы.

4.2. Расчет гидравлического удара с использованием волновых функций

4.2.1. Прямой и непрямой гидравлический удар. Давление прямого удара

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления, вызванное резким изменением скорости течения жидкости.

Оценим силу удара, вызванного действием только первичными волнами без учета влияния отраженных волн (такой удар будет прямым). На рис. 15, *а* показана гидросистема, включающая два резервуара, две линии трубопровода и регулирующее устройство (клапан).

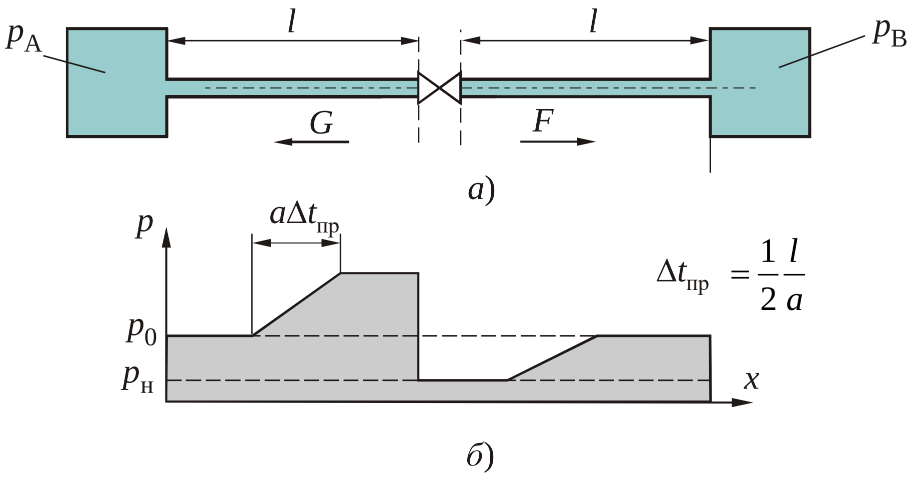


Рис. 15. Возникновение гидроудара при перемещении заслонки клапана:
а) – схема волновых функций; б) – диаграмма давления
в трубопроводе в промежуточный момент времени

Пусть переместилась заслонка клапана и появились волны F и G. В соответствии с волновыми уравнениями (4.10) изменения давления и скорости будут следующими:

- на участке 1 (выше клапана по направлению течения)

$$p - p_0 = G; \quad w - w_0 = -\frac{G}{\rho a};$$

- на участке 2 (ниже клапана по направлению течения)

$$p - p_0 = F; \quad w - w_0 = \frac{F}{\rho a}.$$

Исключив из этих соотношений волновые функции, получим связь между изменениями давления и скорости

$$p - p_0 = \pm\rho a\left(w - w_0\right). \tag{4.11}$$

Формула (4.11) была впервые предложена Н.Е. Жуковским. В ней знак минус относится к потоку перед источником удара (в нашем случае перед клапаном), знак плюс – к потоку за источником удара. Формула показывает, что торможение потока $\left(w < w_0\right)$ вызывает повышение давления перед клапаном и падение давления за ним, а ускорение потока $(w > w_0)$, наоборот – понижение давления перед ним и повышение за ним.

Оценим изменение давления при ударе. Пусть избыточное давление в напорном резервуаре (см. рис. 15) $p_{\text{A}} = 0{,}1\,\text{МПа}$, а в конце трубопровода $p_{\text{B}} = 0$. Плотность жидкости $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3$; скорость звука $a = 1200\,\text{м/с}$. Скорость течения жидкости при открытом клапане и коэффициенте его сопротивления $\xi = 15$ без учета потерь на трение, на вход и выход из трубопровода равна

$$w_0 = \sqrt{\frac{2(p_{\text{A}} - p_{\text{B}})}{\rho(1+\xi)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^5}{10^3(1+15)}} = 3{,}54\,\text{м/с}.$$

Наибольшее ударное изменение давления в трубопроводе после полного закрытия клапана $(w = 0)$ без учета отраженных (вторичных) волн, то есть при прямом ударе, находим по формуле Жуковского:

- пред клапаном

$$p_{\text{B}} - p_0 = -1000\cdot 1200(0 - 3{,}54) = 4{,}25\cdot 10^6\ \text{Па} = 4{,}25\,\text{МПа};$$

- за клапаном

$$p_{\text{C}} - p_0 = 1000\cdot 1200(0 - 3{,}54) = -4{,}25\cdot 10^6\ \text{Па} = -4{,}25\,\text{МПа}.$$

Следовательно, перед клапаном избыточное давление увеличивается в 42,5 раза по сравнению с максимальным статическим давлением в данной системе, а за клапаном должно упасть ниже абсолютного нуля, что физически невозможно. При снижении давления до критической величины, которая определяется давлением насыщенных паров жидкости при данной температуре и парциальным давлением содержащихся в жидкости газов, произойдет нарушение сплошности жидкости. В ее массе образуется каверна, заполненная парами жидкости и газами, ранее содержащимися в жидкости. При отсутствии газов давление в каверне равно давлению насыщенных паров $p_{\text{н}}$ и снижение давления ниже этой величины невозможно. Это явление называется кавитацией. Устранить кавитацию в этом случае можно, подняв давление в системе.

Рассмотренный пример показывает, что изменение давления в волновых процессах может превосходить в десятки раз статическое давление системы. Поэтому сильный гидравлический удар может быть причиной аварий и требует принятия специальных мер защиты.

В реальных условиях клапан закрывается за конечный промежуток времени $t_{\text{з}}$. Будем считать, что скорость жидкости в трубопроводе изменяется линейно по времени, уменьшаясь от w_0 до нуля. Линейную функцию можно приближенно заменить лестничной функцией, состоящей из элементарных ступенек. Каждое элементарное уменьшение скорости δw вызывает формирование элементарных волн δF_1, δG_1 и соответствующее приращение давления перед клапаном $\delta p = \rho a \delta w$, которое суммируется с предыдущими приращениями давления. То есть имеем линейный рост давления перед клапаном по времени. Если трубопровод достаточно длинный или время $\Delta t_{\text{з}}$ настолько мало, что отраженная от бака элементарная волна разрежения δF_2, возникшая в результате взаимодействия первой элементарной ступеньки δp с баком, не успевает достигнуть клапана, то рост давления в его окрестности будет продолжаться, пока клапан не закроется полностью. Максимальное приращение давления составит $\Delta p = \rho a w_0$.

На рис. 16 показано, каким образом влияет продолжительность закрытия заслонки клапана на максимальное повышение давления перед ним.

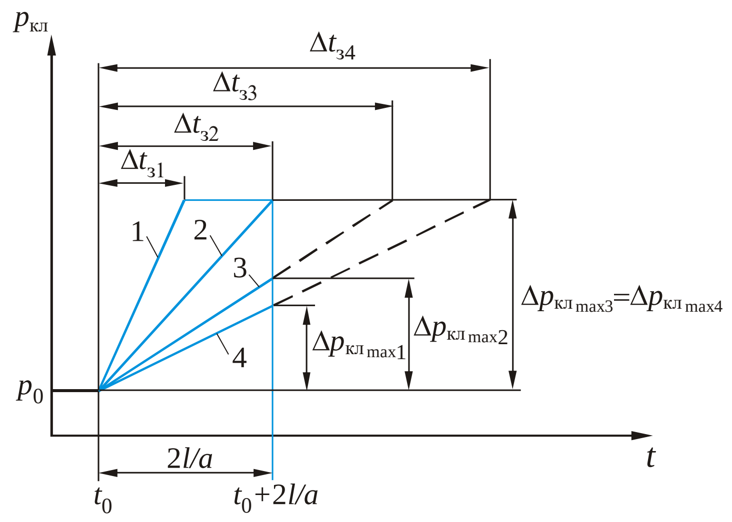


Рис. 16. Влияние продолжительности закрытия клапана $\Delta t_з$ на давление гидроудара

В очень длинном трубопроводе ($l \to \infty$) отраженных (вторичных) волн нет, поэтому максимальное приращение давления на клапане $\Delta p_{кл\,max}$ связано только с первичными волнами. Оно определяется формулой Жуковского, не зависит от времени перемещения заслонки и для приращения давления перед клапаном равно давлению удара

$$\Delta p_{кл\,max} = \Delta p_{уд} = \rho a \Delta w. \tag{4.12}$$

В трубопроводе ограниченной длины появляются отраженные волны, способные повлиять на максимальное ударное давление $\Delta p_{кл\,max}$. Они могут усиливать изменение давления от прямой волны, если отражение происходит с сохранением знака волновой функции (например, отражение от прикрытого клапана, дросселя и т, п.), а также компенсировать или ослаблять изменение давления от прямой волны, если отражение происходит с изменением знака волновой функции (например, отражение от большого резервуара, открытого конца трубопровода и т. п.).

В гидросистеме, показанной на рис. 15, взаимодействие волн (от резервуара и от клапана) вызывает компенсирующее воздействие на величину давления. Так при линейном законе нарастания давления на клапане, вызванном первичной прямой волной сжатия, отраженная от бака волна разрежения может компенсировать дальнейшее повышение давления в прямой волне, если заслонка еще продолжает закрываться после прихода к клапану отраженной от резервуара волны разрежения. Поэтому наибольшее повышение давления перед клапаном $\Delta p_{\text{кл max}}$ будет реализовано в момент прихода отраженной волны, то есть через отрезок времени $2l/a$ после начала перемещения заслонки (см. прямые 3 и 4 на рис. 16), если $\Delta t_з > 2l/a$. На этом же графике видно, что при выполнении последнего условия ударное повышение давления будет тем меньше, чем больше время перемещения заслонки $\Delta t_з$.

Если же перемещение заслонки клапана заканчивается до прихода отраженной от резервуара волны разрежения $\left(\Delta t_з < 2l/a\right)$, то возникает так называемый *прямой удар*, при котором максимальное повышение давления не зависит от времени закрытия заслонки $\Delta t_з$, см. линии 1 и 2 на рис. 16. В соответствии с формулой (4.12), это давление определяется только величиной изменения скорости потока Δw, плотностью жидкости ρ и скоростью распространения волн a.

Гидравлический удар, при котором максимальное изменение давления определяется не только прямой (первичной), но и отраженными волнами, называется *непрямой удар*. Такой удар наблюдается при $\left(\Delta t_з > 2l/a\right)$. При непрямом ударе время закрытия заслонки $\Delta t_з$ влияет на максимальное повышение давления в системе.

4.2.2. Изменение гидродинамических параметров при непрямом гидравлическом ударе

Рассмотрим более подробно изменение гидродинамических характеристик в трубопроводе перед клапаном при непрямом ударе. Координату x будем отсчитывать от бака А по направлению к клапану.

Пусть изменение скорости течения жидкости при перемещении заслонки клапана Δw описывается линейной зависимостью

$$\Delta w = -w_0 \frac{t}{\Delta t_з}, \tag{4.13}$$

где w_0 – скорость течения перед закрытием клапана; t – текущее время процесса, отсчитываемое от начала движения заслонки клапана, $\Delta t_з$ – время полного закрытия клапана.

Уменьшение скорости течения приводит к формированию волны сжатия, распространяющейся от клапана вверх по течению к баку А и описываемой волновой функцией G_1. Согласно (4.10) величина волновой функции в сечении $x = l$ определяется величиной изменения скорости потока:

$$G_1\left(t, x = l\right) = \rho a_1 \frac{w_0}{\Delta t_з} \min\left(t, \Delta t_з\right). \tag{4.14}$$

где a_1 – скорость распространения волны сжатия, а оператор взятия минимума от двух величин t и $\Delta t_з$ – $\min\left(t, \Delta t_з\right)$ учитывает, что изменение скорости потока не может быть больше, чем $\left|\Delta w\right| = w_0$. В волне сжатия, распространяющейся по трубопроводу от клапана к баку А, жидкость тормозится и ее скорость падает от начального значения w_0 до величины $w_0\left[1-\min\left(1,\dfrac{t}{\Delta t_з}\right)\right]$.

Как отмечено в разделе 4.1, величина волновой функции G_1 является однозначной функцией следующей комбинации независимых переменных $t+x/a_1$. Иными словами G_1 сохраняет постоянное значение на характеристике $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-a_1$. Интегрируя это выражение, получим

$$x-l=-a_1\left(t_x-t\right) \text{ или } t=t_x-\frac{l-x}{a_1}. \tag{4.15}$$

Здесь $\left(t_x-t\right)$ – интервал времени необходимый для прохождения волной G_1 расстояния $l-x$, то есть от клапана до текущей координаты x. Подставив (4.15) в (4.14), получим выражение для волновой функции G_1 для произвольного момента времени t и произвольной текущей координаты x

$$G_1\left(t,x\right)=\begin{cases}\rho a_1\dfrac{w_0}{\Delta t_з}\min\left(t-\dfrac{l-x}{a_1},\Delta t_з\right) \text{ при } t\ge\dfrac{l-x}{a_1};\\ 0 \text{ при } t<\dfrac{l-x}{a_1}.\end{cases} \tag{4.16}$$

В (4.16) учтено, что до момента времени $t=\dfrac{l-x}{a_1}$ волна сжатия не достигает координаты x и, следовательно, величина волновой функции G_1 равна нулю. Кроме того учтено, что величина G_1 не может превысить своего максимально возможного значения $\rho a_1 w_0$.

Через промежуток времени $\Delta t=l/a_1$ от начала перемещения заслонки волна сжатия достигает резервуара А и вызывает формирование волны разрежения, так как большой резервуар поглощает энергию волны сжатия, поддерживая давление на входе в трубопровод равным исходному давлению (до закрытия клапана). При этом в области разрежения возникает обратное течение по направлению от клапана к резервуару, так как сжатая жидкость расширяется и истекает в резервуар. Волна разрежения распространяется по трубопроводу от резервуара в сторону клапана и описывается волновой функцией F_1. Ее величина в сечении $x=0$, в соответствии с (4.10), равна

$$F_1\left(t,x=0\right)=-G_1\left(t,x=0\right)=\begin{cases}-\rho a_1\dfrac{w_0}{\Delta t_з}\min\left(t-\dfrac{l}{a_1},\Delta t_з\right) \text{ при } t\ge\dfrac{l}{a_1};\\ 0 \text{ при } t<\dfrac{l}{a_1}.\end{cases} \tag{4.17}$$

Скорость распространения волны разрежения a_2 в общем случае отличается от скорости a_1, так как она перемещается по газожидкостной смеси с более высоким давлением (после прохождения волны сжатия). Волновая функция F_1 сохраняет постоянное значение на характеристике $\mathrm{d}x / \mathrm{d}t = a_2$. То есть она принимает в сечении x такое же значение, как при $x = 0$ с запаздыванием по времени, равным x / a_2. Следовательно, выражение для волновой функции F_1 для произвольного момента времени и произвольной текущей координаты можно записать в виде

$$F_1(t,x) = \begin{cases} -\rho a_1 \dfrac{w_0}{\Delta t_з} \min\left(t - \dfrac{l}{a_1} - \dfrac{x}{a_2}, \Delta t_з\right) \text{ при } t \geq \dfrac{l}{a_1} + \dfrac{x}{a_2}; \\ 0 \text{ при } t < \dfrac{l}{a_1} + \dfrac{x}{a_2}. \end{cases} \quad (4.18)$$

В соответствии с (4.9), распределение приращения давления по длине трубопровода в период распространения описанных волн сжатия и разрежения найдется по формуле

$$\Delta p(t,x) = G_1(t,x) + F_1(t,x), \quad (4.19)$$

а распределение приращения скорости течения – по формуле

$$\Delta w(t,x) = \frac{F_1(t,x)}{\rho_2 a_2} - \frac{G_1(t,x)}{\rho_1 a_1}. \quad (4.20)$$

Положив в (4.16) и (4.18) $x = l$ и сложив полученные выражения, найдем закон изменения по времени давления на закрывающемся клапане

$$p_{кл}(t) = p_0 + \begin{cases} \rho a_1 \dfrac{w_0}{\Delta t_з} \min(t, \Delta t_з) \text{ при } t < t_{пр}; \\ \rho a_1 \dfrac{w_0}{\Delta t_з} \left[\min(t, \Delta t_з) - \min(t - t_{пр}, \Delta t_з)\right] \text{ при } t \geq t_{пр}, \end{cases} \quad (4.21)$$

где $t_{пр} = l\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}\right)$ – суммарное время распространения волны сжатия от клапана до бака и волны разряжения в обратном направлении, то есть время прямого удара.

Для иллюстрации картины изменения давления на клапане рассмотрим пример. В качестве исходных данных для простоты анализа примем $p_0 = 2$ бар, $\rho = 1000$ кг/м^3, $a_1 = 1000$ м/с, $a_2 = 1000$ м/с, $w_0 = 2$ м/с, $l = 100$ м. Результаты расчетов $p_{кл}$ при различных величинах времени закрытия клапана показаны на рис. 4.

При принятых исходных данных давление прямого гидроудара составляет $\Delta p_{уд} = 20$ бар, время прохождения волны сжатия от клапана до бака А $t_1 = \dfrac{l}{a_1} = \dfrac{100}{1000} = 0{,}1\,\text{с}$, время прохождения волны разрежения в обратном направлении $t_2 = \dfrac{l}{a_2} = \dfrac{100}{1000} = 0{,}1\,\text{с}$, время прямого удара $t_{пр} = 0{,}2\,\text{с}$.

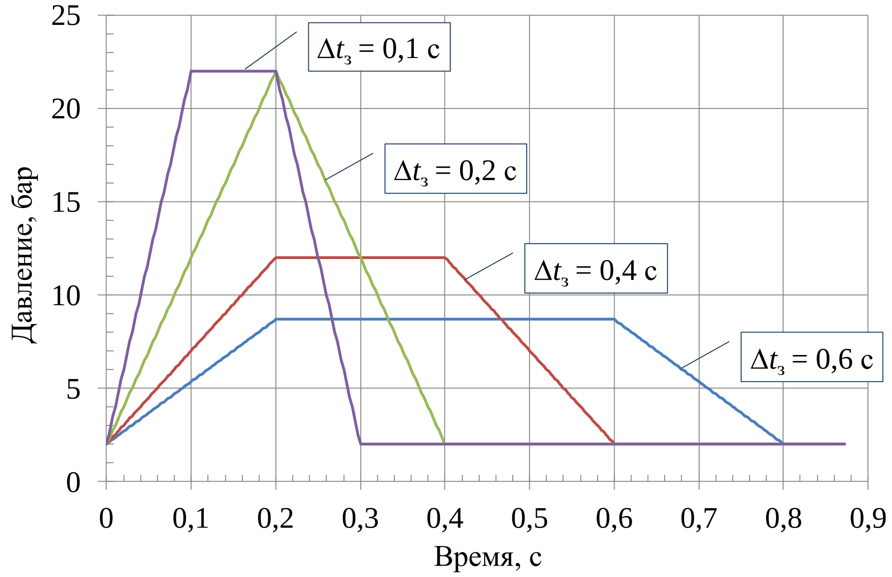


Рис. 17. Изменение давления на клапане при различных временах его закрытия $\Delta t_з$

Из приведенных на рис. 17 результатов видно, что рост давления продолжается в течение прямого удара $t_{пр}$, если время закрытия заслонки больше времени прямого удара $\Delta t_з > t_{пр}$. В противном случае давление возрастает в течение времени закрытия заслонки клапана $\Delta t_з$.

Максимальное давление удерживается в течение времени $\Delta t_{p_{\max}} = \pm\left(t_{пр} - \Delta t_з\right)$. Знак плюс берется, если время закрытия клапана меньше времени прямого удара $\Delta t_з \le t_{пр}$ и знак минус в противном случае.

Максимальное давление на клапане $p_{кл\,\max}$ уменьшается при увеличении времени закрытия $\Delta t_з$. Эта зависимость показана на рис. 18.

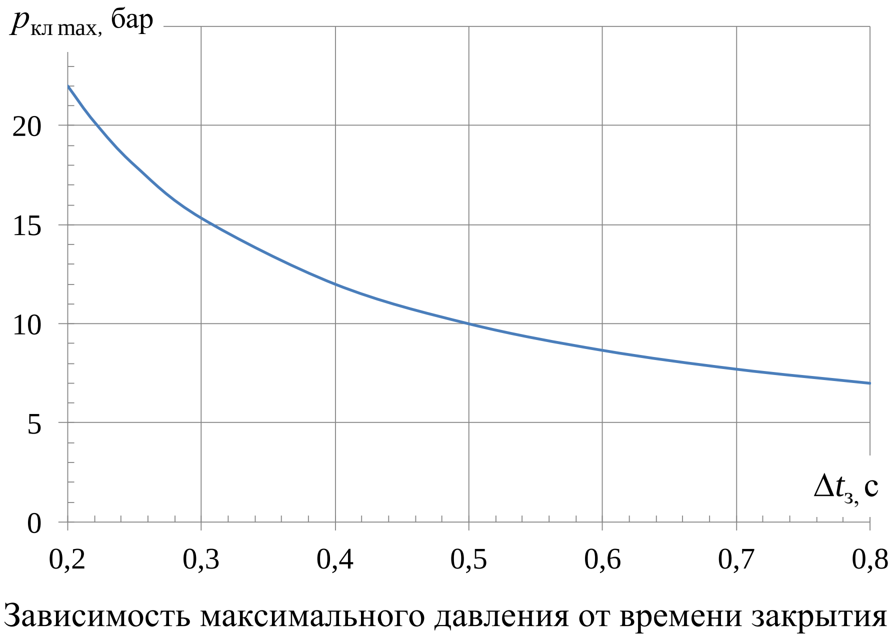


Рис. 18. Зависимость максимального давления от времени закрытия клапана

Аналитически данная зависимость может быть описана формулой

$$p_{\text{кл max}} - p_0 = \Delta p_{\text{уд}} \frac{t_{\text{пр}}}{\Delta t_{\text{з}}} = \rho a_1 w_0 \frac{t_{\text{пр}}}{\Delta t_{\text{з}}} \qquad (4.22)$$

Давление на клапане возвращается к исходному уровню через промежуток времени $\left(t_{\text{пр}} + \Delta t_{\text{з}}\right)$.

Распределение давления по длине трубопровода при времени закрытия клапана $\Delta t_{з} = 0,\ 05$ с, реализующееся в различные моменты времени, показано на рис. 19.

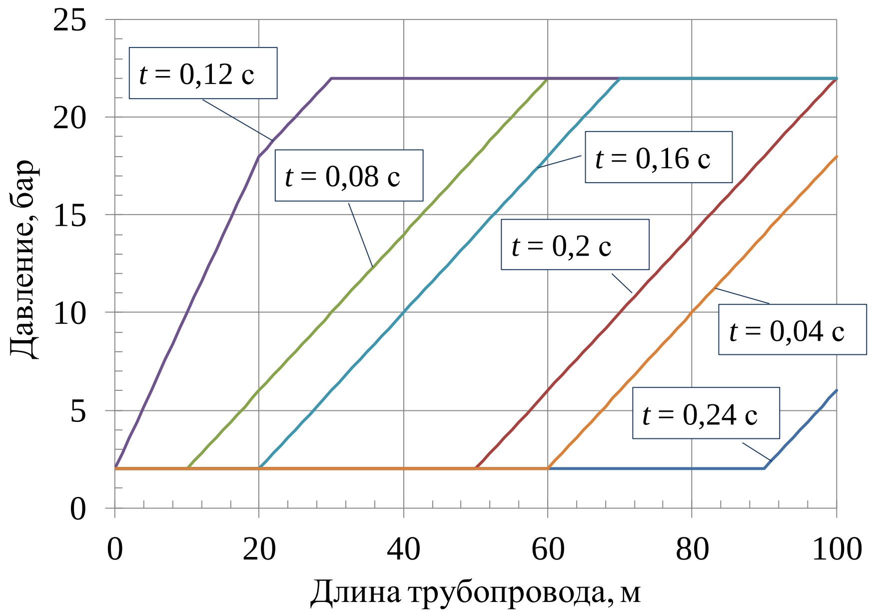


Рис. 19. Распределение давления по длине трубопровода в процессе закрытия клапана

Приведенные распределения получены путем расчетов по формулам (4.16), (4.18) и (4.19) при тех же исходных данных, что и использованные ранее при расчете максимального давления гидроудара на рис 17. Видно, что при постепенном открытии клапана фронт ударной волны имеет протяженный характер. Распределение скорости жидкости, реализующееся в те же моменты времени рассчитано по формуле (4.20) и показано на рис. 20.

Строго говоря, переходный процесс при гидроударе не заканчивается после возвращения давления на клапане к исходному уровню, а в течение некоторого времени продолжится падение давления (см. раздел 1 настоящего пособия). Это обусловлено тем, что в волне разрежения F_1 возникает обратное течение со скоростью $F_1/(\rho a_2)$. При достижении волной F_1 клапана обратный поток тормозится, что вызывает формирование волны разрежения G_2, распространяющейся от клапана к баку А. Достигнув бака, она отразится волной сжатия F_2, распространяющееся от бака к клапану. При достижении бака она вызовет рост давления на клапане, соответствующий ее интенсивности. Такой процесс формирования и распространения волн сжатия и разрежения будет продолжаться, пока энергия волн не диссипирует в тепловую энергию за счет действия сил вязкого сопротивления.

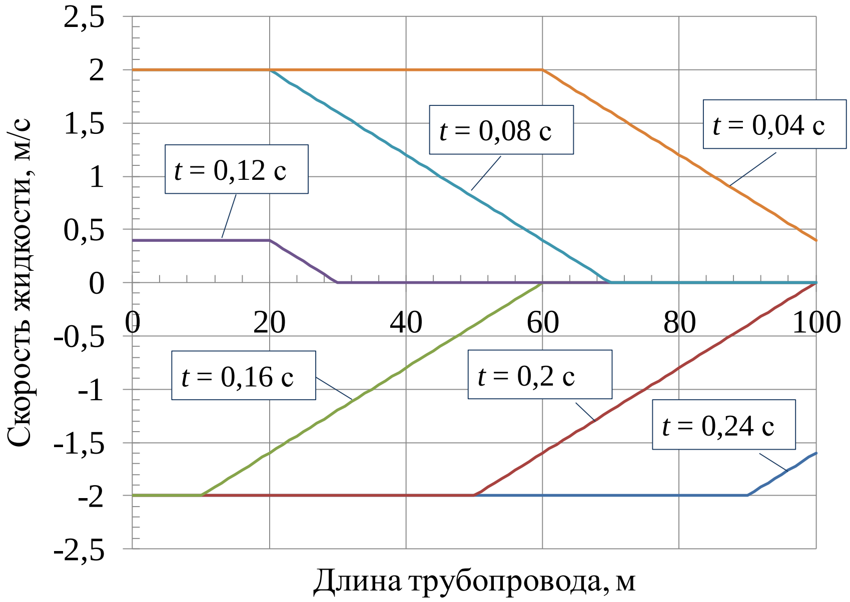


Рис. 20. Распределение скорости жидкости по длине трубопровода
в процессе закрытия клапана

Заметим также, что при высокой интенсивности волны разрежения G_2 давление на клапане может опуститься до давления насыщенных паров жидкости, что приведет к нарушению сплошности потока, то есть на клапане возникнет явление кавитации. Учет явления кавитации требует применения более сложной математической модели, чем изложенной в настоящем разделе. Поэтому ограничимся рассмотрением только первой фазы гидравлического удара, при которой формируются только волны F_1 и G_1.

В рассмотренной картине отражения первичной волны сжатия от резервуара отраженная волна уменьшала максимальное давление на клапане. В более сложной гидросистеме отраженная волна может усиливать изменение давления на клапане, если отражение первичной волны сжатия происходит с сохранением знака волны, например, от тупикового элемента гидролинии. Напоминаем, что при отражении от жесткой стенки интенсивность волны удваивается.

Контрольные вопросы

1. Каким образом волновая функция P связана с приращениями давления и скорости?
2. Каким образом волновая функция G связана с приращениями давления и скорости?
3. Запишите формулу, выражающую приращение давления в волновом процессе с волновыми функциями.
4. Запишите формулу, выражающую приращение скорости потока в волновом процессе с волновыми функциями.
5. Каким образом приращение давления при прямом гидроударе связано со скоростью распространения волн?
6. Дайте определение понятия «прямой гидравлический удар».

7. Дайте определение понятия «не прямой гидравлический удар».

8. Почему при не прямом гидравлическом ударе максимальное давление в трубопроводе ниже, чем при прямом ударе?

9. Максимальное давление в трубопроводе равно давлению прямого гидроудара, если время закрытия клапана больше времени прямого удара?

10. Время роста давления в окрестности клапана равно времени его закрытия, если время закрытия больше времени прямого удара?

11. Время существования максимального давления в трубопроводе равно модулю разности времени закрытия клапана и времени прямого удара?

12. Максимальное давление в трубопроводе при гидравлическом ударе уменьшается обратно пропорционально времени закрытия клапана?

13. Через какое время после начала закрытия клапана давление на нем возвращается к исходному уровню?

14. Возможно ли в процессе гидроудара понижение давления в окрестности клапана ниже исходного уровня?

15. До какой величины в пределе возможно понижение давления в гидросистеме в ударно-волновом процессе?

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

5.1. Постановка задачи

Требуется рассчитать изменение давления на закрывающемся клапане при гидроударе в гидросистеме, изображенной на рис. 15. Исходные данные для расчета:

Давление в левом баке $p_А$ = 0,25 МПа;

Давление в правом баке $p_Б$ = 0,075 МПа;

Длина трубопровода от клапана до баков l = 17 м;

Диаметр трубопровода D = 25 мм;

Толщина трубопровода $\delta_т$ = 1,5 мм;

Время закрытия клапан $\Delta t_з$ = 0,1 с;

Коэффициент гидравлического сопротивления клапана до закрытия $\xi = 10$;

Коэффициент гидравлического трения трубопровода λ = 0,03;

Рабочая жидкость – вода;

Объемная доля нерастворенного воздуха в рабочей жидкости в баке А β = 0,3 %;

Материал трубопровода – Ст 20.

5.2. Принятые допущения и расчет давления гидравлического удара

Как следует из (4.11), приращение давления при гидроударе пропорционально скорости распространения волны a. Следовательно, точность расчета гидродинамических параметров при гидравлическом ударе зависит от корректности оценки скорости a, которая для газонасыщенной жидкости, в соответствии с (2.18), существенно зависит от давления. Это создает трудности при расчете гидроудара в рассматриваемой задаче, так как закрытие клапана происходит не мгновенно, а за конечный промежуток времени $\Delta t_з$. Следовательно, каждое элементарное перемещение клапана при его закрытии создает элементарную волну сжатия, распространяющуюся вверх по потоку уже предварительно сжатому в результате предшествующих перемещений. То есть скорость a изменяется как по длине трубопровода, так и по времени процесса. Поэтому для корректного расчета необходимо задаться шагом по времени $\Delta t << \Delta t_з$ и для каждого момента времени $t = n\Delta t$, где n – номер временного шага, используя формулы (2.18) и (4.17)…(4.19), определять распределение давления по длине трубопровода и скорость распространения волны.

В настоящем пособии ограничимся приближенной оценкой максимального давления при гидроударе, учитывая при этом, что скорость волны возрастает с ростом давления. Для этого рассмотрим фазы распространения волны сжатия от клапана до бака А и волны разрежения в обратном направлении. Это позволит приближенно учесть, что волна разрежения будет распространяться по уже предварительно сжатой среде и ее скорость будет больше, чем скорость волны сжатия. В качестве давления для расчета скорости волн примем средние по длине трубопровода значения давления при распространении волн сжатия и разрежения.

Расчет проводим в следующей последовательности.

1. Используя уравнение Клапейрона-Менделеева, находим плотность воздуха при давлении $p_А$

$$\rho_г = \frac{p_А}{RT} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{287 \cdot 303} = 2,87 кг/м^3,$$

где R – газовая постоянная воздуха; T – его термодинамическая температура.

2. Находим плотность газожидкостной смеси в баке А, используя формулу (2.4)

$$\rho_{см} = \beta\rho_г + (1-\beta)\rho_ж = 0,003 \cdot 2,87 + 0,997 \cdot 1000 = 997 кг/м^3.$$

Плотность смеси в трубопроводе от бака А до клапана до его закрытия принимаем равной плотности смеси в баке А.

3. Определяем стационарную скорость течения жидкости (до закрытия клапана)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p_А - p_Б)}{\rho_{см}\left(\lambda\frac{2l}{D} + \xi_{кл} + \xi_{вх} + \xi_{вых}\right)}} = \sqrt{\frac{2(2,5-0,75)\cdot 10^5}{997\left(0,03\frac{2\cdot 17}{0,025} + 10 + 0,5 + 1\right)}} = 2,59 \text{ м/с}.$$

4. Определяем давление, реализующееся перед клапаном до его закрытия

$$p_0 = p_А - \rho_{см}\frac{v_0^2}{2}\left(1 + \lambda\frac{l}{D} + \xi_{вх}\right) = 2,5\cdot 10^5 -$$

$$-997\frac{2,59^2}{2}\left(1 + 0,03\frac{17}{25\cdot 10^{-3}} + 0,5\right) = 2,45\cdot 10^5 Па.$$

5. Среднее давление в трубопроводе перед клапаном до его закрытия

$$p_{ср} = (p_А + p_0)/2 = (2,5 + 2,45)10^5/2 = 2,48\cdot 10^5 Па.$$

6. Находим скорость распространения волны сжатия (в трубопроводе до клапана) с использованием формулы (2.22)

$$a = 1/\sqrt{\rho_{см}\left[\frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0} + \frac{1-\beta}{E_ж} + \frac{D}{E_т\delta_т}\right]} =$$

$$= 1/\sqrt{997\left[\frac{1}{1,4}\frac{0,003}{2,48\cdot 10^5} + \frac{0,997}{2,1\cdot 10^9} + \frac{25\cdot 10^{-3}}{2,1\cdot 10^{11}\cdot 1,5\cdot 10^{-3}}\right]} = 330 м/с.$$

7. Находим приращение давления при прямом гидроударе по формуле (4.11)

$$\Delta p_{уд} = \rho_{см} v_0 a = 8,52\cdot 10^5 Па.$$

8. Находим время распространения волны сжатия от клапана до бака А

$$t_1 = l/a = 17/330 = 0,051 с.$$

9. Определяем время прямого гидроудара в первом приближении, как время прохождения волны сжатия от клапана до бака А и волны разрежения в обратном направлении при постоянной скорости $a = 330$ м/с

$$t_{\text{уд}} = 2t_1 = 0{,}103\text{с}.$$

10. Находим приращение давления на клапане за время движения волны сжатия по формуле (4.22)

$$\Delta p_1 = \Delta p_{\text{уд}} \min\left(1 - \frac{t_1}{\Delta t_{з}}\right) = 8{,}52 \cdot 10^5 \min\left(1, \frac{0{,}051}{0{,}1}\right) = 8{,}55 \cdot 10^5 \cdot 0{,}513 = 4{,}39 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

11. Среднее по длине трубопровода давление в волне сжатия

$$p_{\text{ср}1} = \frac{p_{\text{А}} + \left(p_0 + \Delta p_1\right)}{2} = \frac{2{,}5 + \left(2{,}48 + 4{,}4\right)}{2} 10^5 = 4{,}67 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

12. Объемная доля воздуха в жидкости в трубопроводе после прохождения воны сжатия, считая процесс сжатия воздуха адиабатическим, находится по формуле (2.21)

$$\beta_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{1-\beta}{\beta}\left(\dfrac{p_{\text{ср}1}}{p_{\text{А}}}\right)^{k}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1-0{,}003}{0{,}003}\left(\dfrac{4{,}69}{2{,}5}\right)^{\frac{1}{1{,}4}}} = 0{,}0019$$

13. Плотность смеси жидкости и газа в трубопроводе после прохождения воны сжатия

$$\rho_{\text{г}_1} = \rho_{\text{г}_1}\left(\frac{p_{\text{ср}1}}{p_{\text{А}}}\right)^{\frac{1}{k}} = 2{,}87\left(\frac{4{,}69}{2{,}5}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} = 4{,}5\text{кг/м}^3$$

14. Плотность смеси жидкости и газа в трубопроводе после прохождения воны сжатия

$$\rho_{\text{см}_1} = \beta_1 \rho_{\text{г}_1} + \left(1 - \beta_1\right)\rho_{\text{ж}} = 0{,}0019 \cdot 4{,}50 + 0{,}9981 \cdot 1000 = 998{,}1\text{кг/м}^3.$$

15. Скорость распространения волны разрежения, движущейся от бака А к клапану,

$$a_1 = 1 / \sqrt{\rho_{\text{см}1}\left[\frac{1}{k}\frac{\beta_1}{p_{\text{ср}_1}} + \frac{1-\beta_1}{E_{\text{ж}}} + \frac{D}{E_{\text{т}}\delta_{\text{т}}}\right]} =$$

$$= 1 / \sqrt{998{,}1\left[\frac{1}{1{,}4}\frac{0{,}0019}{4{,}67 \cdot 10^5} + \frac{0{,}9981}{2{,}1 \cdot 10^9} + \frac{25 \cdot 10^{-3}}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}5 \cdot 10^5}\right]} = 535{,}5\text{м/с}.$$

16. Время распространения волны разрежения от бака А до клапана

$$t_2 = l / a = 17 / 536{,}9 = 0{,}0317\text{с}.$$

17. Время роста давления на клапане

$$t = t_1 + t_2 = 0{,}051 + 0{,}0317 = 0{,}083\text{с}.$$

18. Максимальное давление на клапане в процессе его закрытия оцениваем по формуле (4.22)

$$p_{\text{кл}\max} = p_0 + \Delta p_{\text{уд}} \min\left(1, \frac{t}{\Delta t_{\text{з}}}\right) = 2,45 \cdot 10^5 + 8,52 \cdot 10^5 \min\left(1, \frac{0,083}{0,1}\right) = 9,55 \cdot 10^5 \, \text{Па}.$$

Как видно, максимальное давление на клапане несколько ниже, чем давление прямого гидроудара, которое составляет

$$p_{\text{пр}} = p_0 + \Delta p = 2,45 \cdot 10^5 + 8,55 \cdot 10^5 = 11,0 \cdot 10^5 \, \text{Па}.$$

Чем больше время закрытия клапана $\Delta t_{\text{з}}$, тем меньше максимальное давление на клапане.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Гидропривод. Основы и компоненты: учебный курс по гидравлике. Том 1 / Х. Экснер, Р. Фрейтаг, Ч. Гайс и др. пер. с нем. Д.Б. Горобец. – М.: ООО «Бош Рексрот АГ», 2003. – 323 с.:ил.

2 Умбрасас, М.-Р.А О развитии гидравлического удара в централизованных системах теплоснабжения при аварийном останове сетевых насосов / М.-Р.А Умбрасас, А.Г. Филонов, А.П. Бич. // Известия КГТУ. – 2014. – №35. – С. 23–31.

3 Жуковский, Н.Е. Полное собрание сочинений. Гидравлика. Том VII / Н.Е. Жуковский: под ред. проф. А.П. Котельникова. – М.–Л.: Глав. ред. авиац. лит-ры (ОНТИ ВКТБ СССР), 1937. – 146 с.: ил.

4 Зубов, Л.Б. Гидравлический удар в напорных водоводах / Л.Б. Зубов, Д.Н. Смирнов. – М.: Стройиздат, 1975. – 125 с.: ил.

5 Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко и др. – М.: Наука, 1976 г. – 400 с.:ил.

6 Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с, 311 ил., 22 табл. – (Классики отечественной науки).

7 Емцев, Б.Т. Техническая гидромеханика: учебник для вузов / Б.Т. Емцев. - М. Машиностроение, 1987. – 463 с.

8 Попов, Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: учебн. для вузов / Д.Н.Попов. – М.: Машиностроение, 1976. – 424 с.: ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 1
Сокращения и условные обозначения 5
1. Общие сведения о гидравлическом ударе 6
1.1. Внешние признаки и последствия гидравлического удара 6
1.2. Физическая картина процессов при гидравлическом ударе 9
1.3. Термины и определения в теории гидравлического удара 13
1.4. Вклад российских ученых в исследования гидравлического удара.... 13
1.5. Контрольные вопросы 14
2. Характеристики сжимаемости жидкости. Формула Жуковского 16
2.1. Характеристики сжимаемости жидкости 16
2.2. Формула Жуковского 16
2.3. Скорость распространения волн 17
2.4. Контрольные вопросы 21
3. Расчет гидроудара численным методом 22
3.1. Математическая постановка задачи 22
3.2. Конечно-разностная аппроксимация и метод решения 24
3.3. Аппроксимация и устойчивость численного решения 27
3.4. Течения с разрывами параметров 30
3.5. Нефизическое поведение решения 31
3.6. Контрольные вопросы 32
4. Аналитическое решение уравнений гидравлического удара в идеальной жидкости 33
4.1. Дифференциальные уравнения нестационарного движения жидкости в трубопроводе. Волновые функции 33
4.2. Расчет гидравлического удара с использованием волновых функций 35
4.2.1. Прямой и непрямой гидравлический удар. Давление прямого удара 35
4.2.2. Изменение гидродинамических параметров при непрямом гидравлическом ударе 38
Контрольные вопросы 43
5. Пример расчета гидродинамических параметров при гидравлическом ударе 45
5.1. Постановка задачи 45
5.2. Принятые допущения и расчет давления гидравлического удара 45
Библиографический список 49
Оглавление 50